TEORÍA Y PRÁCTICA

INGRESO DE MATEMÁTICA

Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias

Universidad Nacional de San Luis



Ingenierías 2026

UNIDAD Nº1:
CONJUNTOS Y NÚMEROS REALES

NOCIONES DE CONJUNTOS

Un **conjunto** es una colección de objetos que tienen una característica en común, que se denominan elementos o **miembros** del conjunto.

En aritmética y en álgebra los elementos de un conjunto por lo general son números. Cuando nos referimos a los conjuntos usamos llaves { } para encerrar los elementos (o descripción de la característica común de los mismos) y letras mayúsculas para nombrar los conjuntos. Los elementos se escriben separados por comas, pueden ir en cualquier orden y figuran una sola vez.

Ejemplos:

$A = \{\text{vocales del abecedario}\}$ *Descripción verbal. Por comprensión.*

$A = \{a, e, i, o, u\}$ *Listado. Por extensión.*

$A = \{x \ / \ x \text{ es vocal}\}$ *Notación constructor de conjunto. Por comprensión.*

El símbolo $\in$ indica pertenencia de un elemento a un conjunto y $\notin$ significa que no pertenece. Si observamos los conjuntos dados anteriormente, $a \in A$ se lee "*a es un elemento del conjunto A*"; en cambio $b \notin A$ se lee "*b no es un elemento del conjunto A*".

El cardinal de un conjunto es el número de elementos que posee. A tiene 5 elementos, por lo tanto, el cardinal de A es 5 y se simboliza $|A| = 5$

Formas de describir un conjunto

- Descripción por extensión: se realiza nombrando todos los elementos del conjunto. Esto solo puede hacerse cuando el cardinal del conjunto es finito.
  Ejemplo: $A = \{1, 3, 5, 7\}$
- Descripción por comprensión: se realiza especificando o enunciando una propiedad que identifique a todos los elementos del conjunto. Cuando el cardinal es muy grande o no es finito, es necesario emplear esta notación haciendo uso de una descripción.

  Ejemplo: $A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \text{ es impar y } 1 \leq x \leq 7\}$

  Se lee: A es el conjunto cuyos elementos son los números naturales, impares y comprendidos entre el 1 y el 7 incluyendo ambos.

Conjunto referencial

Cuando hablamos, por ejemplo, del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ podemos decir que nos estamos refiriendo a elementos del conjunto $\mathbb{N}$ como conjunto de referencia o conjunto referencial de los números considerados. También podríamos haber dicho que nos estamos refiriendo a números naturales menores que 10, o a números naturales menores que 100. Es decir, tanto el conjunto $\mathbb{N}$ como el conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ como el conjunto $C = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x < 100\}$ pueden ser elegidos como conjunto de referencia al hablar del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$

Para elegir el conjunto referencial de una situación, bastará con que todos los elementos que se quieran considerar en esa oportunidad estén en el referencial elegido.

Igualdad de Conjuntos

Los conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos y se denota $A = B$

Ejemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x < 5\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x \leq 4\}$$

Siendo $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, resulta que $A = B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ puesto que ambos conjuntos tienen los mismos elementos.

Conjunto Vacío

Es el conjunto que no tiene elementos y se lo denota con el símbolo: $\emptyset$

Ejemplo:

$$A = \{x: x \text{ es una persona mayor que su abuela}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z}: x \text{ es múltiplo de 3 y } -1 < x < 2\}$$

Definido el conjunto B de esta manera, no existe ningún número entero que cumpla la condición dada ya que los enteros comprendidos entre −1 y 2 son 0 y 1, los cuales no son múltiplos de 3.

Por lo tanto, $A = B = \{\} = \emptyset$

Conjunto Universal

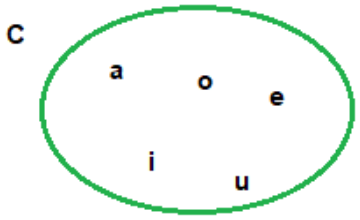
Es el conjunto de todos los posibles elementos del tema en estudio y su símbolo es U.

Ejemplo: El conjunto de todos los números reales. El conjunto de los meses del año.

Representación gráfica de un conjunto

Para representar gráficamente a los conjuntos se suelen utilizar los diagramas de Venn.

Ejemplo: $C = \{a, e, i, o, u\}$



Este tipo de representación brinda la ventaja de analizar con mayor claridad la relación entre dos o más conjuntos y favorece la obtención de conclusiones.

Subconjunto

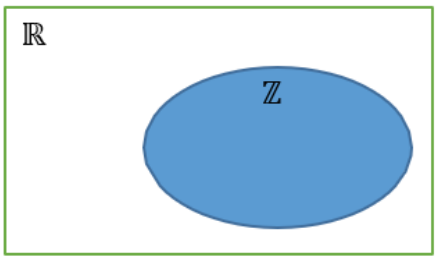
Si todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B y se denota como:

$$A \subseteq B$$

Esto se lee: "*A es subconjunto de B*", "*A está incluido en B*", "*A está contenido en B*", "*B incluye a A*" o "*B contiene a A*".

Ejemplo:

- Los números enteros son un subconjunto de los números reales: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$



OPERACIONES CON CONJUNTOS

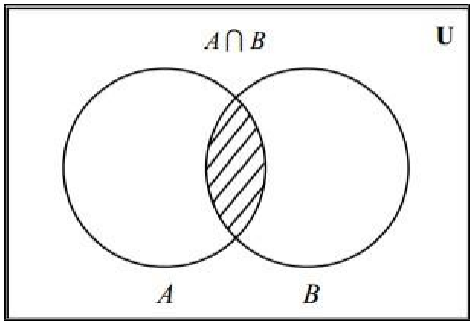
Intersección

Dados dos conjuntos A y B, se denomina intersección de A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y que pertenecen a B.

O sea, se refiere a los elementos comunes de ambos conjuntos y se denota: $A \cap B$

$$A \cap B = \{x / x \in A \ \ y \ \ x \in B\}$$

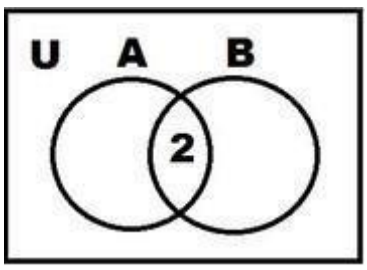
Gráficamente:



Ejemplo: Dados los conjuntos A y B, realizar la intersección de A y B.

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$



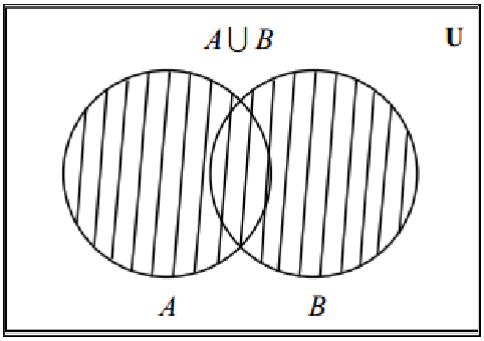
Unión

Dados dos conjuntos A y B, se llama unión de A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o que pertenecen a B.

Es decir, el conjunto resultante de la unión de A y B, que se simboliza $A \cup B$, contiene los elementos que pertenecen a A o que pertenecen a B o a ambos conjuntos.

$$A \cup B = \{x / x \in A \ o \ x \in B\}$$

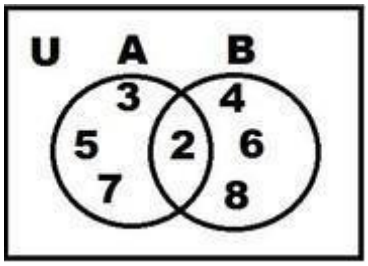
Gráficamente:



Ejemplo:

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

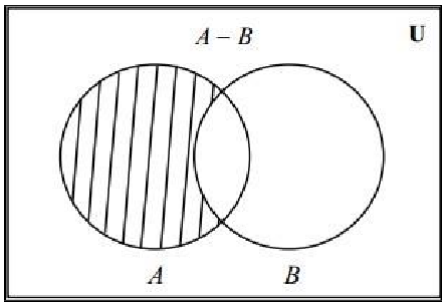


Diferencia

Dados dos conjuntos A y B, se denomina diferencia $A - B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

$$A - B = \{x / x \in A \ y \ x \notin B\}$$

Gráficamente:



Ejemplo:

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

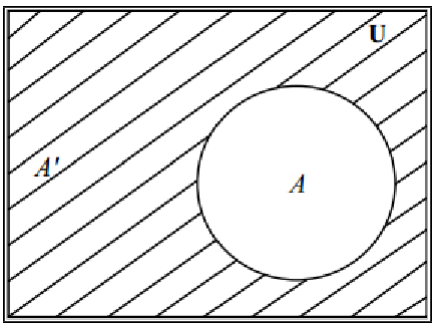
$$A - B = \{3, 5, 7\}$$

Complemento

Si A es un subconjunto del conjunto universal U, se dice que el complemento de A (relativo a U), es el conjunto formado por todos los elementos de U que no pertenecen a A.

$$A^C = A' = \{ x \in U \,/\, x \notin A \}$$

Gráficamente:



Ejemplo: Sea $U = \mathbb{N}$

Si $A = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, x \geq 10 \}$ entonces $A^C = A' = \{ x \in \mathbb{N} \,/\, x < 10 \}$

PROPIEDADES

Propiedades de la inclusión

i) $A \subset A$

ii) $\emptyset \subset A$

iii) $A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A \iff A = B$

iv) $A \subset B \ y \ B \subset D \ \Rightarrow A \subset D$

Propiedades de la unión e intersección

i) Identidad	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
ii) Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
iii) Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
iv) Asociativa	$(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D)$	$(A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$
v) Distributiva	$(A \cup B) \cap D =$ $(A \cap D) \cup (B \cap D)$	$(A \cap B) \cup D =$ $(A \cup D) \cap (B \cup D)$
vi) Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
vii) Complementariedad	$A \cup A^c = U$	$A \cap A^c = \emptyset$

CONJUNTOS DE NÚMEROS

NÚMEROS NATURALES

Los denominados números naturales son los primeros números que se aprenden, son el 1, 2, 3, 4, etc. Fueron los primeros números inventados por la humanidad para contar u ordenar los elementos de un conjunto no vacío.

A los números naturales los simbolizamos con la letra **N**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots\}$$

Operaciones

La suma y el producto de números naturales son siempre naturales.

En cambio, la diferencia no siempre es otro natural. Simbólicamente:

- Si $a \in \mathbb{N}$ **y** $b \in \mathbb{N}$, entonces $a + b \in \mathbb{N}$ (a y b se llaman términos o sumandos)
- Si $a \in \mathbb{N}$ **y** $b \in \mathbb{N}$, entonces $a \cdot b \in \mathbb{N}$ (a y b se llaman factores)

Ejemplo:

a) $2 + 4 = 6 \in \mathbb{N}$
b) $3 \cdot 5 = 15 \in \mathbb{N}$
c) $4 - 4 = 0 \notin \mathbb{N}$
d) $3 - 9 = -6 \notin \mathbb{N}$

NÚMEROS ENTEROS

Para dar solución al problema que se presenta al restar números naturales donde el minuendo es igual o menor que el sustraendo, se crearon otros números que amplían el conjunto de los números naturales. Se agregan el número cero y los números opuestos a los naturales. Este nuevo conjunto numérico recibe el nombre de **enteros** y lo simbolizamos con **Z**.

El conjunto de los números **enteros** está formado por la unión de los naturales, el cero y los opuestos de los naturales.

Simbólicamente se expresan $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Los **números enteros** permiten contar nuevos tipos de cantidades (como los saldos acreedores o deudores) y ordenar por encima o por debajo de un cierto elemento de referencia (las alturas sobre o bajo el nivel del mar o temperaturas superiores o inferiores a 0 grados, los pisos de un edificio por encima o por debajo de la planta baja, etc.).

Operaciones

- La suma, la diferencia y el producto de números enteros siempre dan como resultado otro entero.

  Ejemplos:

  $$4 + 5 = 9 \qquad 4 \cdot 9 = 36$$
  $$3 - 7 = -4 \qquad (-2) \cdot (-3) = 6$$
  $$-5 + 8 = 3 \qquad 2 \cdot (-5) = -10$$

- La **diferencia** $a - b$ es considerada como la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo

  $$a - b = a + (-b)$$

  donde a es el minuendo y b es el sustraendo

  Ejemplos:

  $$9 - 10 = 9 + (-10) = -1 \qquad (-2) - 5 = -7$$
  $$8 - (-5) = 8 + 5 = 13 \qquad (-2) - (-5) = (-2) + 5 = 3$$

- La división entre los enteros a y b, con $b \neq 0$, arroja como resultado dos números enteros, llamados cociente (c) y resto (r). A a se lo denomina dividendo y a b, divisor.

  La división se puede expresar como: $\boldsymbol{a = b \cdot c + r}$

Se dice que la división es **exacta**, si "*a es* ***múltiplo*** *de b*", y "*a es* ***divisible*** *por b*", o "*b es* ***factor*** *de a*" o que "***b divide*** *a* ***a***".

Ejemplos:

– 20 es múltiplo de 5	30 es múltiplo de 6
8 es factor de – 32	9 tiene como divisores ± 1, ±3, ±9
3 es divisor de –9	El 5 tiene infinitos múltiplos: {5, 10, 15, …}
1 y –1 son divisores de n, $n \in \mathbb{Z}$	n es divisor de n, para todo $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

La división a/b no está definida cuando $b = 0$.

Ejemplos: $2:0$ **y** $0:0$ **¡no existen!**

Regla de los signos

Para la adición	Para la multiplicación o Producto
$+(+a) = +a$	$(+a) \cdot (+b) = +a \cdot b$
$-(-a) = +a$	$(-a) \cdot (-b) = +a \cdot b$
$+(-a) = -a$	$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$
$-(+a) = -a$	$(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$

En el conjunto numérico de los números enteros no siempre es posible la división; por eso aparecen los números racionales.

NÚMEROS RACIONALES

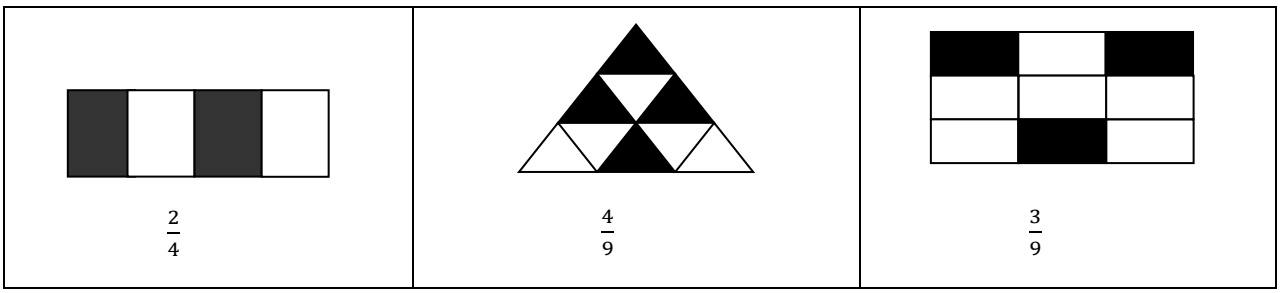
Los números racionales, también llamados fraccionarios, se crearon para indicar una parte de algo y se pueden escribir como el cociente de dos enteros.

En símbolos $Q = \left\{\frac{a}{b} / a, b \in Z \text{ y } b \neq 0\right\}$

Los números racionales representan partes de un todo.

Las partes sombreadas de los siguientes objetos están representadas por números racionales.

Ejemplos:



El conjunto de los números racionales es denso.

Entre dos números racionales hay infinitos números racionales. Esta afirmación podría justificarse sencillamente si tenemos en cuenta que la suma de racionales es siempre otro racional, el promedio será otro racional y estará comprendido entre ellos.

Podríamos continuar indefinidamente el procedimiento de promediar dos números racionales encontrando siempre que hay otro racional entre dos racionales por más próximos que estén. Por ello decimos que **Q es un conjunto denso.**

NÚMEROS IRRACIONALES

Todos los números racionales están representados por puntos sobre la recta numérica, pero, *¿todos los puntos de la recta son representaciones de números racionales?*

La respuesta es **NO.** Existen otros números que junto a los racionales completan la recta numérica. Ellos son los **números irracionales**.

Un número irracional es un número real que no puede expresarse como una fracción $\frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

Surgieron a raíz de problemas geométricos y no pueden representarse de ninguna de las formas vistas hasta ahora. Algunos ejemplos son $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$ y π.

Tras distinguir los números componentes de la recta real en tres categorías: (naturales, enteros y racionales), podría parecer que ha terminado la clasificación de los números, pero aún quedan "huecos" por rellenar en la recta de los números reales.

Los números irracionales son los elementos de dicha recta que cubren los vacíos que dejan los números racionales.

Se caracterizan por tener infinitas cifras decimales que no siguen un período. Por eso, un número irracional puede definirse como un decimal infinito no periódico.

Toda expresión en números decimales es solo una aproximación en números racionales al número irracional referido, por ejemplo, el número racional 1,4142135 es solo una aproximación a 7 cifras decimales del número irracional raíz cuadrada de 2, el cual posee infinitas cifras decimales que no siguen un período.

Entonces, decimos con toda propiedad que el número raíz cuadrada de dos es *aproximadamente* igual a 1,4142135 en 7 decimales, o bien es *igual* a 1,4142135…, es decir, los tres puntos hacen referencia a los infinitos decimales que hacen falta y que jamás terminaríamos de escribir.

Debido a ello, los más célebres números irracionales son identificados mediante símbolos especiales; los tres principales son los siguientes:

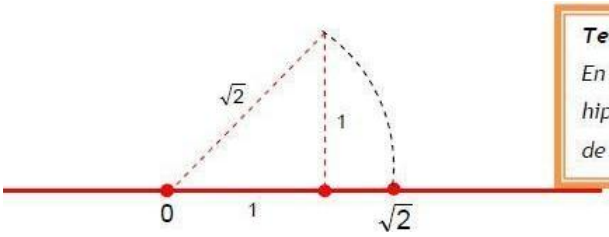
1. $\boldsymbol{\pi}$ (pi): cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.
2. $\boldsymbol{e}$ (número de Euler): $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
3. $\boldsymbol{\varphi}$ (número áureo): $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ubicación exacta de $\sqrt{2}$

Con ayuda del Teorema de Pitágoras podemos ubicar de manera exacta a $\sqrt{2}$.

Si construimos un triángulo rectángulo de catetos unitarios, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$.

Luego con ayuda de un compás trasladamos la medida de la hipotenusa a la recta real.



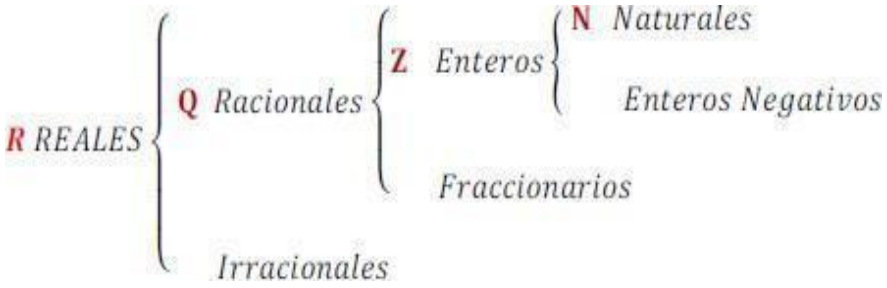
Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Entre los racionales y los irracionales se completa la recta numérica. Es decir, ya no queda ningún punto sobre la recta al que no le corresponda ya sea un número racional o un número irracional. Por eso, al unir ambos conjuntos se forma el conjunto de los números reales.

NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales es la unión del conjunto de los racionales y el de los irracionales.
Simbólicamente: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$



CARACTERÍSTICAS DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

- ✓ Es un conjunto infinito
- ✓ No tiene primero ni último elemento
- ✓ Es un conjunto denso: entre dos números reales existen siempre infinitos números reales.

El conjunto de números reales completa la recta numérica ya que, si sobre una recta fijamos un origen y un segmento unidad, a cada número real corresponde un punto en la recta y a todo punto de la recta corresponde un número real.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades conmutativa y asociativa respecto a la suma y al producto

▪ **Conmutativa** $a + b = b + a$	$4 + 7 = 7 + 4$	Cuando se suman dos números el orden no importa
$a \cdot b = b \cdot a$	$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$	Cuando se multiplican dos números el orden no importa
▪ **Asociativa** $(a + b) + c = a + (b + c)$	$(4 + 3) + 2 = 4 + (3 + 2)$	Cuando se suman tres números, no importa cuáles de ellos se suman primero
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$		Cuando se multiplican tres números, no importa cuáles de ellos se multiplican primero

▪ **Distributiva** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$	$(4 \cdot 3) \cdot 2 = 4 \cdot (3 \cdot 2)$ $4 \cdot (5 + 2) = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2$ $(4 + 5) \cdot 2 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2$	Cuando multiplicamos una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.

- Existen números reales que son **neutros** respecto de la suma y el producto.

  0 es el neutro respecto de la suma pues $a + 0 = a$

  1 es el neutro respecto del producto pues $a \cdot 1 = a$

- Todos los números reales tienen opuesto, y todos, excepto el 0, tienen recíproco.

  $-a$ se dice inverso aditivo u opuesto de a.

  $\frac{1}{a}$ se dice inverso multiplicativo o recíproco de a.

- La división de números reales **NO** goza de las propiedades conmutativa ni asociativa.

Unidad 1 - Números Reales

Ejemplos:

1) $4 : 5 \neq 5 : 4$
2) $8 : (4 : 2) \neq (8 : 4) : 2$

- Pero goza de la propiedad distributiva a la derecha.

  (**Solo** es válido distribuir el divisor en las sumas y restas presentes en el dividendo)

$$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c \qquad \frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$$

Ejemplos:

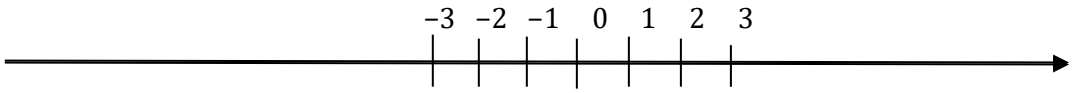
$$\frac{\sqrt{3}+3}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \qquad \frac{2a-3b}{2} = \frac{2a}{2} - \frac{3b}{2} = a - \frac{3b}{2}$$

REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL

Es posible establecer una relación biunívoca (1-1) entre el conjunto de los números reales y los puntos de una recta, así el conjunto de los números reales se puede representar gráficamente sobre una recta denominada "recta real" o "recta numérica".

Para construir una recta numérica, se traza una recta horizontal, se elige un punto arbitrario al cual se le asigna el número cero (0) y se escoge un segmento unidad para graduar la recta. Este punto, que representa al cero, divide la recta en dos semirrectas opuestas, a la derecha generalmente se ubican los números reales positivos y a la izquierda los números reales negativos.

A cada número real le corresponde un único punto de la recta real y cada punto de la recta numérica representa un único número real.



VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

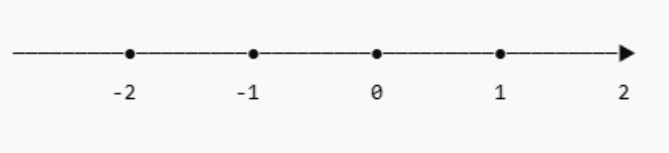
La notación $|x|$ se emplea para expresar el valor absoluto de un número real.

$$|x| = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x \leq 0 \end{cases}$$

Geométricamente, el valor absoluto de *x* es la distancia entre el punto de la recta representativo del número *x* y el punto que representa el cero.

Ejemplo:

$$|x| = 2 \text{ significa que } x = -2 \; o \;\; x = 2$$



Ejemplo:

Si $x^2 = 49$, entonces $|x| = \sqrt{49} = 7$, es decir, $x = 7$ o $x = -7$.

ORDEN Y NOTACIÓN DE INTERVALO

Al representar los números reales en la recta numérica, se puede observar que este conjunto es ordenado. Es decir, que dados dos números reales a y b, se puede determinar siempre una relación de igualdad, menor o mayor. Esto significa que se cumple una y solo una de las relaciones $a < b$, $a = b$ o $a > b$.

Orden de los números reales

Sean a y b cualesquiera dos números reales:

Símbolo	Definición	Se lee
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b
$a \geq b$	$a - b$ es positivo o cero	a es mayor o igual que b
$a \leq b$	$a - b$ es negativo o cero	a es menor o igual que b

Son símbolos de desigualdades: $>, <, \geq, \leq$.

Una propiedad importante para comparar dos números reales es la ***Ley de Tricotomía***.

Ley de Tricotomía

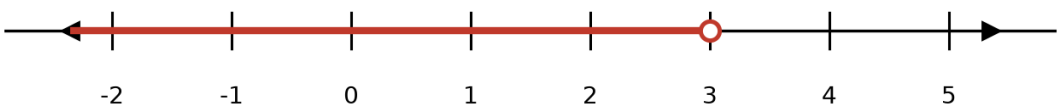
Sean a y b cualesquiera dos números reales. Solo una de las siguientes expresiones es verdadera:

$$a < b, \quad a = b \quad \text{o } a > b$$

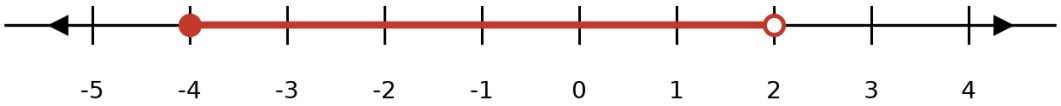
Es posible utilizar las desigualdades para expresar distintos intervalos de números reales.

Ejemplo:

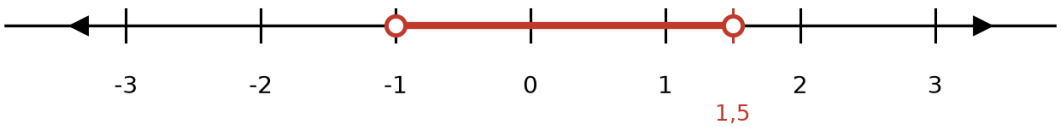
a) $x < 3$ la variable puede tomar cualquier valor de todos los números reales menores que 3.



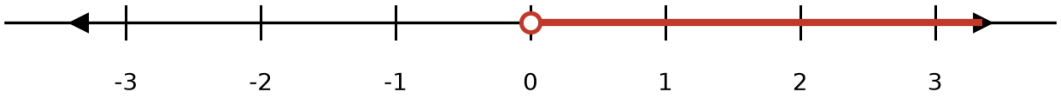
b) $-4 \leq x < 2$ expresa que la variable x puede tomar cualquier valor de todos los números reales entre -4 y 2, incluido el -4 y excluido el 2.



c) $-1 < x < 1{,}5$ representa el intervalo de todos los números reales que están entre – 1 y 1,5.



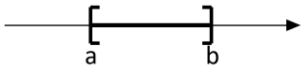
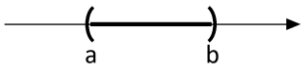
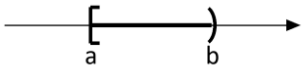
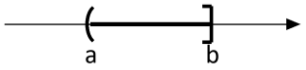
d) $x > 0$ es el intervalo o el conjunto de todos los números reales mayores que cero.



Existen distintos tipos de intervalos o conjuntos numéricos que se pueden representar con desigualdades, analítica o gráficamente**.** Pueden ser acotados o no acotados.

Intervalos acotados de números reales

Sean a y b números reales donde $a < b$.

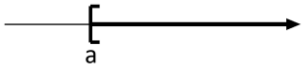
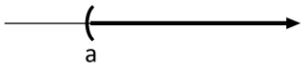
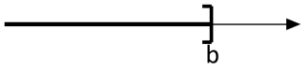
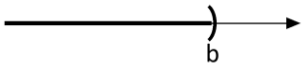
Notación de intervalo	Tipo de intervalo	Notación de desigualdades	Gráfica
$[a, b]$	Cerrado	$a \leq x \leq b$	
(a, b)	Abierto	$a < x < b$	
$[a, b)$	Semiabierto o semicerrado	$a \leq x < b$	
$(a, b]$	Semiabierto o semicerrado	$a < x \leq b$	

Los números a y b son los extremos de cada intervalo.

Los símbolos $-\infty$ (infinito negativo) y ∞ (infinito positivo) no son números reales, pero nos brindan la posibilidad de emplear la notación de intervalos no acotados.

Intervalos no acotados de números reales

Sean a y b números reales.

Notación de intervalo	Tipo de intervalo	Notación de desigualdades	Gráfica
$[a, \infty)$	Cerrado por izquierda y no acotado por derecha	$x \geq a$	
(a, ∞)	Abierto por izquierda y no acotado por derecha	$x > a$	
$(-\infty, b]$	Cerrado por derecha y no acotado por izquierda	$x \leq b$	
$(-\infty, b)$	Abierto por derecha y no acotado por izquierda	$x < b$	

Cada uno de estos intervalos tiene exactamente un extremo a o b.

ORDEN DE OPERACIONES

Para resolver operaciones aritméticas, se deben respetar ciertas reglas:

1. Primero resolver todo lo que esté dentro de símbolos de agrupación.

2. Evaluar las expresiones exponenciales.

3. Hacer todas las multiplicaciones y divisiones en orden de izquierda a derecha.

4. Hacer todas las sumas y restas en orden de izquierda a derecha.

Ejemplo:

$$6 + 2 \cdot (3^2 - 1)$$
$$6 + 2 \cdot (9 - 1)$$
$$6 + 2 \cdot 8$$

$6 + 16$
22

Propiedades de la Igualdad en R

- **Si a ambos miembros de una igualdad les sumamos una misma constante, o los multiplicamos por ella, se obtiene otra igualdad**

  Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$

  Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$

  Ejemplo:

  Como $8 = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8}$, entonces se tiene que $8 + 1 = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} + 1$

  Como $4 = \sqrt{16}$, si multiplicamos ambos miembros por 3, la igualdad se conserva $4 \cdot 3 = \sqrt{16} \cdot 3$

- **Si sumamos o multiplicamos miembro a miembro dos igualdades se obtiene otra igualdad**
  Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$
  Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a \cdot c = b \cdot d$

  Ejemplo:

$$4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \quad \text{y} \quad 8 = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} \quad \Rightarrow \quad 4 + 8 = \sqrt{8} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{8})$$

$$\text{y} \quad 4 \cdot 8 = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{8})^3 \quad \Rightarrow \quad 32 = \sqrt{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{8} \quad \Rightarrow \quad 32 = 8 \cdot \sqrt{16}$$

Propiedades de la desigualdad

✓ **Si a ambos miembros de una desigualdad se les suma una misma constante, la desigualdad se mantiene.**

$$Si\ a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$$

Ejemplo:

$$1 < \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 < 2 + \sqrt{3}$$

✓ **Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por una misma constante positiva la desigualdad se mantiene**

$$Si\ a < b \quad y \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c$$

Ejemplo:

$$1 < \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 2 < 2 \cdot \sqrt{3}$$

✓ **Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por una misma constante negativa la desigualdad cambia de sentido**

$$Si\ a < b \quad y \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c$$

Ejemplo:

$$1 < \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad -1 \cdot 2 > -2 \cdot \sqrt{3}$$

OPERACIONES CON RACIONALES Q

Suma y resta

1) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ 2) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$	Para sumar fracciones con igual denominador se suman los numeradores Para sumar fracciones con distinto denominador, se encuentra el común denominador y luego se resuelve

Ejemplos:

1) $\frac{3}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+7+1}{4} = \frac{11}{4}$

2) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + 2 = \frac{6+15+36}{18} = \frac{57}{18}$

Producto y cociente

1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ 2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	Para multiplicar se efectúa el producto de los numeradores y de los denominadores. Para dividir fracciones se multiplica por el recíproco del divisor.

Ejemplos:

1) $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{21}{20}$

2) $\frac{3}{2} : \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

Potenciación

La operación de la potenciación se define como un producto particular. Sea $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$ **,** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ **,** se define la potencia enésima de $\boldsymbol{a}$ como el número $\boldsymbol{a^n}$ que es el resultado de multiplicar $\boldsymbol{a}$ por sí mismo $\boldsymbol{n}$ veces.

$$\boxed{\boldsymbol{a^n} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \ldots \boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{n}\ veces)}$$

$\boldsymbol{a}$ se denomina **base** y $\boldsymbol{n}$ se denomina **exponente.**

Propiedades

- Si $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ **,** entonces $\boldsymbol{a^0} = \boldsymbol{1}$
- En el producto de potencias de igual base se suman los exponentes

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

- En el cociente de potencias de igual base se restan los exponentes

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

- La potencia de un producto es el producto de las potencias

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

- La potencia de un cociente es el cociente de las potencias

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

- En la potencia de una potencia se multiplican los exponentes

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

- a^{-1} es el inverso de a. Esto es:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

- $a^{-n} = \frac{1}{(a)^n}$

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Radicación

Sean $a \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$; se define la raíz enésima $\sqrt[n]{a}$ como el número que, elevado a la potencia n, da como resultado a:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$$

a se denomina **radicando** y n se denomina **índice**.

La raíz de un número entero no siempre es un número entero.

Ejemplo: $\left(\sqrt{8}\right)^3 = 2$ y $\sqrt{5}$ no es un entero.

La ***radicación*** goza de las siguientes propiedades, siempre que las raíces involucradas estén definidas.

Propiedades

- Distributiva respecto al producto y recíprocamente

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6 = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12 = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$$

- Distributiva respecto al cociente y recíprocamente

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{100 : 25} = \sqrt{100} : \sqrt{25}$$

$$\sqrt{4} = 10 : 5 = 2$$

- Raíz de raíz, los índices se multiplican

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[12]{5}$$

¡Cuidado!

La potenciación y la radicación no son distributivas respecto a la suma ni a la resta.

A continuación, se plantean situaciones de cálculos correctos e incorrectos.

Cálculo correcto	Cálculo Incorrecto
$(2+4)^2 = 6^2 = 36$	$(2+4)^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$
$(2-4)^2 = (-2)^2 = 4$	$(2-4)^2 = (2)^2 - (4)^2 = 4 - 16 = -12$
$\sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$	$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$
$\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$	$\sqrt{100-36} = \sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$

Simplificación

En una suma o resta no se puede simplificar **NUNCA** un término del numerador con un término o divisor del denominador.

Ejemplos:

$\frac{4+\not{3}}{16+\not{3}}$ NO	$\frac{3+\not{2}}{5\cdot\not{2}}$ NO	$\frac{3\cdot\not{2}}{5+\not{2}}$ NO

En una multiplicación o división sí se puede simplificar un factor del numerador con un divisor del denominador.

Ejemplo: $\frac{4\cdot\not{3}}{16\cdot\not{3}}$ **SÍ**

Simplificación del índice de la raíz con el exponente del radicando

$$\sqrt[6]{a^9} = \sqrt{a^3}$$

Ejemplo: $\sqrt[4]{9^2} = \sqrt{9} = 3$

Notación decimal

Todo número racional puede expresarse en notación decimal ya sea exacta o periódica.

Conversión de un número decimal a fracción:

Número Decimal		Regla	Ejemplo
Exacto		En el numerador se coloca el número sin la coma y en el denominador se coloca el 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el número	$0{,}35 = \frac{35}{100}$ $2{,}124 = \frac{2124}{1000}$
Periódico	**Puro**	En el numerador se coloca la diferencia entre la expresión sin la coma y la parte anterior al período y como denominador tantos 9 como cifras tiene el período.	$0{,}565656\ldots = \frac{56}{99}$ $14{,}\widehat{5} = \frac{145-14}{9} = \frac{131}{9}$
	Mixto	En el numerador se coloca la diferencia entre la expresión sin coma y la parte anterior al período y en el denominador tantos nueves como cifras tenga el período y tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.	$24{,}2\widehat{5} = \frac{2425-242}{90} = \frac{2183}{90}$ $1{,}0353535\ldots = \frac{1035-10}{990} = \frac{1025}{990}$

OPERACIONES CON NÚMEROS IRRACIONALES

Radicales

Las operaciones de suma, diferencia, producto, cociente y potenciación de números irracionales no siempre arrojan como resultado otro irracional. ***¡Algunas veces los resultados son racionales!***

Muchas raíces son números irracionales, por ejemplo:

Ejemplos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{7}$

Radicales semejantes

Dos radicales son semejantes cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplos: $\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$

En cambio, los radicales $\sqrt{3}$, $5\sqrt{5}$, $4\sqrt{7}$ son radicales **no** semejantes.

Simplificación de radicales

Para llevar un radical a su mínima expresión, se descompone el radicando en factores primos.

Ejemplo: Descomponer $\sqrt{60}$

60	2
30	2
15	3
5	5
1	-

Luego:

$$\sqrt{60} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$\sqrt{60} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 5}$$

$$\sqrt{60} = 2 \cdot \sqrt{3 \cdot 5}$$

$$\sqrt{60} = 2 \cdot \sqrt{15}$$

Extracción de factores fuera del radical

Solo se pueden extraer factores del radical cuando el exponente del factor es mayor o igual que el índice del radical. Se divide el exponente por el índice, el cociente resulta ser el exponente del factor que sale y el resto es el exponente del factor que queda en el radicando.

$$\sqrt[3]{a^{17}} = a^5 \sqrt[3]{a^2}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{27y^5z^4} = 3 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot \sqrt{3y}$$

Observación: Siempre para extraer factores fuera del radical la potencia debe ser igual o mayor al índice y los valores numéricos se deben descomponer.

Introducción de factores dentro del radical

Para introducir factores dentro del radical se multiplica el exponente del factor por el índice del radical

Ejemplo:

$$a^3 \cdot b \cdot \sqrt[4]{a \cdot b^3 \cdot c^5} = \sqrt[4]{a \cdot b^3 \cdot c^5 \cdot a^{12} \cdot b^4} = \sqrt[4]{a^{13} \cdot b^7 \cdot c^5}$$

OPERACIONES CON RADICALES

Suma algebraica

Para efectuar la suma algebraica, se simplifican los radicales, luego se reducen los radicales semejantes y por último se escriben los radicales no semejantes con su propio signo

Ejemplos:

a. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

b. $16\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 2\sqrt{12} =$

$16\sqrt{3} - 5\sqrt{3^3} + 2\sqrt{2^2 \cdot 3} =$

$16\sqrt{3} - 5 \cdot 3\sqrt{3} + 2 \cdot 2\sqrt{3} =$

$16\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \mathbf{5\sqrt{3}}$

c. $-\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} =$

$-\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} - \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} =$

$-2\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = \mathbf{\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3}}$

Multiplicación de radicales

Para multiplicar radicales se multiplican los coeficientes entre sí y luego los radicandos, si las raíces tienen el mismo índice. Si no tienen igual índice, primero se reducen a índice común.

Ejemplos:

a. $2\sqrt[3]{5} \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{25} = 8 \cdot \sqrt[3]{125} = 8 \cdot \sqrt[3]{5^3} = 8 \cdot 5 = \mathbf{40}$

b.

$\frac{2}{3}\sqrt{x \cdot y^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot y^3} =$

$\frac{2}{12}\sqrt[6]{x^3 \cdot y^6 \cdot x^4 \cdot y^6} =$

$\frac{1}{6}\sqrt[6]{x^7 \cdot y^{12}} =$

$\mathbf{\frac{1}{6}\, x \cdot y^2 \sqrt[6]{x}}$

División de radicales

Para dividir radicales de igual índice se dividen los coeficientes entre sí, luego los radicandos.

Si los radicales tienen distinto índice se saca primero el común índice y luego se sigue operando como se indicó en el párrafo anterior.

Ejemplos:

a. $\sqrt{3 \cdot z^3 \cdot y^2} : \sqrt{6 \cdot z \cdot y^4} = \sqrt{\frac{3 \cdot z^3 \cdot y^2}{6 \cdot z \cdot y^4}} = \sqrt{\frac{z^2}{2 \cdot y^2}} = \mathbf{\frac{z}{y} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}$

b. $2\sqrt[4]{3x^2y} : -\frac{1}{3}\sqrt[6]{zy^2} = -6\sqrt[12]{\frac{3^3x^6y^3}{z^2y^4}} = \mathbf{-6\sqrt[12]{\frac{27x^6}{z^2y}}}$



Unidad 1 - Operaciones con Radicales

Racionalización

Racionalizar el denominador es transformar una expresión con radicales en el denominador en otra equivalente sin radicales en el denominador.

A continuación, veremos algunos ejemplos:

- **El denominador es un radical cuadrático único:** Se multiplican tanto el numerador como el denominador por ese radical, y se realizan todas las operaciones y simplificaciones necesarias para obtener un denominador racional.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{\boldsymbol{a \cdot \sqrt{b}}}{\boldsymbol{b}}$$

- **El denominador es un radical único de índice mayor que 2 de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ $(n > m)$:** Se multiplica numerador y denominador por un radical de la forma $\sqrt[n]{a^{n-m}}$, para seguir operando y simplificando hasta obtener un denominador racional.

$$\frac{a}{\sqrt[5]{b^2}} = \frac{a}{\sqrt[5]{b^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^3}} = \frac{a \cdot \sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^5}} = \frac{\boldsymbol{a \cdot \sqrt[5]{b^3}}}{\boldsymbol{b}}$$

- **El denominador es un binomio en el que aparecen una o dos raíces cuadradas:** Se multiplica numerador y denominador por su conjugado, y se realizan las operaciones y simplificaciones necesarias.
  Ejemplos:

a) $\frac{3}{2-\sqrt{b}} = \frac{3}{2-\sqrt{b}} \cdot \frac{\left(2+\sqrt{b}\right)}{(2+\sqrt{b})} = \frac{\boldsymbol{3 \cdot \left(2+\sqrt{b}\right)}}{\boldsymbol{4-b}}$

b) $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\boldsymbol{a \cdot \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}}{\boldsymbol{a-b}}$



Unidad 1 - Racionalización

Actividad N.° 1: ¿Cuáles son los elementos de los siguientes conjuntos?

- **a)** El conjunto de los días de la semana.
- **b)** El conjunto de las estaciones del año.
- **c)** Los números impares menores a 11.
- **d)** Los números pares mayores a 10 y menores a 20.

Actividad N.° 2: ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos, unitarios, finitos o infinitos?

- **a)** $A = \{x \ / \ x \text{ es día de la semana}\}$
- **b)** $B = \{\text{vocales de la palabra vals}\}$
- **c)** $C = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
- **d)** $D = \{x \ / \ x \text{ es un habitante de la Luna}\}$
- **e)** $E = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < 15\}$
- **f)** $F = \{x \in \mathbb{N} \ / \ 5 < x < 15\}$
- **g)** $G = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x > 15\}$

Actividad N.° 3: Siendo los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{a, b, 1\}$ $C = \{1, 2, 3\}$, realizar las siguientes operaciones:

- **a)** $A \cup B$
- **b)** $B \cap C$
- **c)** $B \cap C$
- **d)** $(A \cup B) \cup C$
- **e)** $(A \cup B) \cap C$

Actividad N.° 4: Marcar con una X el conjunto numérico al que pertenece cada uno de los números indicados.

	24	6	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{5}$	11π	9,12	$0,\widehat{32}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$	$-(-4)+5$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\sqrt[3]{-27}$
N											
Z											
Q											
I											
R											

Actividad N.° 5: Dados los siguientes números:

$$1{,}5 \ ; \ -3{,}124 \ ; \ -9 \ ; \ \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \ ; \ e \ ; \ 1002 \ ; \ \sqrt{11} \ ; \ 7 \ ; \ \sqrt[3]{0{,}125} \ ; \ -1{,}33333\dots$$

I. Indicar:

a) Los números enteros que no son naturales	
b) Los números racionales que no son enteros	
c) Los números reales que son racionales	
d) Los números reales que son irracionales	

II. Tachar los números que no correspondan a su clasificación:

Naturales **N**	$0\ ;\ -2\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ -0{,}2\ ;\ 5\ ;\ \varphi\ ;\ 12{,}143\ ;\ 1{,}452111\ldots$
Enteros **Z**	$-3\ ;\ \frac{4}{3}\ ;\ 0\ ;\ 2\pi\ ;\ -3{,}2\ ;\ 4\ ;\ -2{,}5$
Racionales **Q**	$-3,\ 0,\ -2{,}12\widehat{4}\ ,\ \left(\frac{5}{2}\right)^3\ ;\ \sqrt{5}\ ;\ 8\ ;\ \sqrt[3]{0{,}125}$
Irracionales **I**	$5\ ;\ 12{,}5\widehat{4}\ ;\ -32\ ;\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\ ;\ \pi\ ;\ 2\sqrt{2}\ ;\ \sqrt[3]{13}\ ;\ -2{,}7$

Unidad 1- Ejercicios Combinados

Actividad N.° 6: Resolver los siguientes ejercicios:

a) $16 : 8 - 2 - (-4 + 2) + 5 \cdot (-1) =$

b) $8 - 6 : (-3) + 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-4) =$

c) $\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{16}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)\cdot 10} =$

d) $\left[\frac{\left(1-\frac{1}{4}\right)}{1-\left(-\frac{5}{6}\right)}\right]^2 =$

e) $\left(-\frac{4}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{-3} - \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2} - 18^{-\frac{1}{2}}\right) - \sqrt{\frac{1}{64}\cdot\frac{8}{3}} =$

f) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \left(2 - \frac{7}{5}\right)^2 \cdot (-1)^3 =$

Actividad N.° 7: Completar con mayor (>), menor (<) o igual (=), según corresponda:

a) $2^3 \ldots\ldots 3^{-1}$ b) $-3^2 \ldots\ldots (-3)^2$ c) $\frac{1}{4} \ldots\ldots \frac{3}{7}$ d) $-3{,}5 \ldots\ldots \frac{35}{10}$

e) $(-10)^0 \ldots\ldots -(10)^0$ f) $\sqrt{144} \ldots\ldots (-3)^3$ g) $0,\widehat{3} \ldots\ldots \frac{1}{3}$ h) $8{,}5 \ldots\ldots \frac{8}{5}$

Actividad N.° 8: Resolver aplicando propiedades:

a) $a^{-3} \cdot a^4 \cdot a^2 =$ b) $6^8 : 6^6 =$ c) $x^{-8} \cdot x^5 \cdot x^3 =$

d) $(2x^3y^4)^2 =$ *e)* $\sqrt{5}\sqrt{20} =$ f) $\sqrt[3]{-24} : \sqrt[3]{-3} =$

g) $\sqrt[3]{-64 : 8} =$ h) $(6:2)^3 =$ i) $(2a^3b^4)^5 =$

Actividad N.° 9: Indicar verdadero **(V)** o falso **(F)**, según corresponda. Justificar los casos **(F)**.

a) $(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2$ .....
b) $(3-5)^2 = 3^2 - 5^2$.....
c) $[(-2)^3]^5 = (-2)^8$ .....
d) $3^4 + 3^5 = 3^9$ .....
e) $(-6)^5 : (-6)^5 = -6$ .....

Actividad N.° 10: Resolver los siguientes ejercicios combinados:

a) $(-2)^3 - (-8) : (-2)^2 - (-1)^4 \cdot \sqrt{9+16} =$

b) $(-5)^0 - (4-5)^3 \cdot \sqrt[3]{-125} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$

c) $\left(4 + \frac{1}{2} + 2{,}7\right) \cdot 5 - (0{,}05 - 3{,}15 - 1{,}1) : 2 =$

d) $(2)^2 : (-4) + \sqrt{25 \cdot 4} + (3 \cdot 3 - 5) =$

e) $3^5 : 3^2 + \sqrt[3]{-27 : (-8)} - 2 =$

f) $\sqrt[4]{16 \cdot 81} + (-3)^{12} : (-3)^{10} - (-2)^3 =$

g) $\frac{3}{4} : (-3) + (-2)^{-1} - 4 : \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{16}} =$

h) $\dfrac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{15}{4} + \frac{2}{9}}{1 - 3\frac{1}{5}} =$

i) $(3^2 - 2^2) + (-5) \cdot (-5)^2 - 5 \cdot \sqrt{36} =$

j) $\dfrac{\frac{45}{25} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{625} - \frac{2}{625}} =$

Actividad N.° 11: Plantear y resolver los siguientes problemas:

a) Cada uno de los 11 empleados de un taller gana mensualmente $576. Si este mes 3 de ellos recibirán $88 más por horas extras y dos de ellos tendrán un descuento de $23 por llegada tarde, ¿cuánto dinero deberá destinarse para pagar los sueldos?
b) Una caja con una docena de alfajores pesa 600 gramos y cada alfajor pesa 45 gramos. ¿Cuánto pesa la caja?
c) Si por 19 kg de café se pagaron $912, ¿cuánto cuestan 12 kg?
d) La suma de tres números es 5676, la suma de los dos primeros es 4729 y el segundo es 3201. ¿Cuáles son los números?
e) Un club le paga a un jugador $25 por cada partido ganado y $15 por cada partido empatado. Si hasta ahora recibió $365 y ganó 11 partidos, ¿cuántos partidos empató?

Actividad N.° 12: Calcular el valor de las siguientes potencias:

$\boldsymbol{a})\ \left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} =$ $\qquad$ $\boldsymbol{b})\ (121)^{-\frac{1}{2}} =$ $\qquad$ $\boldsymbol{c})\ (-125)^{\frac{1}{3}} =$

Actividad N.° 13: Completar la tabla con los valores que faltan:

Expresión con radicales	Expresión con exponentes
$\frac{1}{\sqrt{7}}$	
$\sqrt[3]{5^2}$	
	$16^{\frac{1}{3}}$
	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2}$
$\frac{1}{\sqrt{x^3}}$	

Actividad N.° 14: Extraer factores del radical:

a) $\sqrt{8a^3b^8c^5}$ b) $\sqrt[3]{32a^4b^5c^9}$ c) $\sqrt[3]{27x^4y^2}$ d) $\sqrt{\frac{x^8}{y^6}}$ e) $\sqrt{\frac{18x^4}{2}}$ f) $\frac{\sqrt{36x^8}}{\sqrt{81x^4}}$ g) $\sqrt[3]{81p^{-5}m^8r^{12}y^{18}} =$ $h)\ \sqrt[4]{3125p^5m^6n^7}$ i) $\sqrt{\frac{256a^5b^9f^6}{125a^6b^{11}f^4}}$

Actividad N.° 15: Introducir factores en el radical:

a) $\frac{4x^3y^2}{3}\sqrt{2xy}$ b) $\frac{5x^5y^3z}{2}\sqrt[3]{\frac{xyz}{2}}$ c) $\frac{25x^5yz^3}{7}\sqrt[4]{\frac{x^3y^2z^2}{7}}$

Actividad N.° 16: Resolver las siguientes sumas algebraicas

a) $5\sqrt{50} - 2\sqrt{18} + 9\sqrt{32} =$ b) $4\sqrt{45} - 2\sqrt{5} + 5\sqrt{125} =$

c) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{16} + \frac{1}{4}\sqrt{72} =$ d) $4\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{3} =$

e) $x\sqrt[3]{2y} - \sqrt[3]{16x^3y} + 3x\sqrt[3]{54y} =$ f) $2\sqrt{52} + (-4)\sqrt{117} + 120\sqrt{13}$

Actividad N.° 17: Racionalizar los denominadores:

a) $\frac{3}{\sqrt{6}} =$ b) $\frac{3}{2+\sqrt{7}}$ c) $\frac{2a}{\sqrt{5a}} =$

d) $\frac{4+\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2} =$ e) $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} =$ f) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}} =$

g) $\frac{2}{\sqrt[5]{16}} =$ h) $\frac{5}{\sqrt[7]{64}} =$ i) $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} =$ j) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{16x}}{4\sqrt{x}}$

LOGARITMACIÓN

La operación inversa de la potenciación, que consiste en calcular el exponente conociendo la potencia y la base se llama **logaritmación**.

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos números reales positivos, siendo $b \neq 1$, existe un único número $\boldsymbol{n}$ tal que:

$$\boldsymbol{b^n = a}$$

El número $\boldsymbol{n}$ se llama logaritmo en base $\boldsymbol{b}$ del número $\boldsymbol{a}$ y se indica:

Definición: $\boldsymbol{\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a}$ $\quad con\ a > 0\ , b > 0\ \wedge\ b \neq 1$

Ejemplos: Hallar los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Propiedades de la logaritmación

1. El logaritmo de 1 en cualquier base es cero
   $\log_b 1 = 0 \Leftrightarrow b^0 = 1$

   Ejemplo: $\log_3 1 = 0 \Leftrightarrow 3^0 = 1$

2. El logaritmo de la base es 1
   $\log_b b = 1 \Leftrightarrow b^1 = b$

   Ejemplo: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

3. El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores
   $\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$

   Ejemplo: $\log_2(4 \cdot 2) = \log_2 4 + \log_2 2$

4. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor
   $\log_b(a : c) = \log_b a - \log_b c$

   Ejemplo: $\log_2(16 : 4) = \log_2 16 - \log_2 4$

5. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de dicha potencia
   $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$

   Ejemplo: $\log_4 4^5 = 5 \cdot \log_4 4 = 5$

6. El logaritmo de una raíz n-ésima es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz
   $\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$

   Ejemplo: $\log_2 \sqrt[4]{16} = \frac{1}{4}\log_2 16$

Logaritmos decimales y logaritmos naturales

Se llaman logaritmos decimales, o de Briggs, los logaritmos de base 10.

Notación: $\log_{10} a = \log a$

Ejemplo: para indicar el logaritmo decimal de 3, escribimos $\log 3$

Se llaman logaritmos **naturales o neperianos** a los logaritmos de base **e,** donde **e** ≈ 2,718 es el número de Euler, presentado con los números irracionales. Se indica $\log_e a = \ln a$

Ejemplo: para indicar el logaritmo natural de 5, escribimos $\ln 5$

Cambio de base

Conociendo el logaritmo de un número en una base determinada podemos obtener el logaritmo de dicho número en cualquier otra base, aplicando la siguiente fórmula:

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

Ejemplo:

$$\log_4 100 = \frac{\log 100}{\log 4} = 3{,}3219 \ldots$$

Unidad 1: Logaritmo

<u>Actividad N.° 18:</u> Hallar los valores de los siguientes logaritmos:

a) $\log_8 64 =$ b) $\log_4 16 =$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 4 =$ d) $\log_{\frac{1}{3}} 27 =$

e) $\log_{25} \frac{1}{5} =$ f) $\log_{36} 6 =$ g) $\log_3 \sqrt{3} =$ h) $\log_5 \sqrt[3]{5} =$

<u>Actividad N.° 19:</u> Aplicar las propiedades del logaritmo:

a) $\log(x \cdot y) =$

b) $\log x - \log y =$

c) $\frac{\log x}{4} =$

d) $\log x^3 =$

e) $\log_b b^2 + \log_b b^3 + \log_b 1 =$

f) $\log_b \sqrt[3]{b} - \log_b b^4 =$

<u>Actividad N.° 20:</u> Aplicando las propiedades del logaritmo, calcular:

a) $\log_2(16 \cdot 8) =$ b) $\log_3(27:3) =$ c) $\log_2 4^3 =$

d) $\log_5 \sqrt[3]{25} =$ e) $\log_{\sqrt{2}}(4 \cdot \sqrt{2}) =$ f) $\log_3 15 + \log_3 5^{-1} =$

Notación Científica

La ***notación científica*** y la ***notación de ingeniería*** permiten representar cantidades muy grandes o muy pequeñas, muy comunes en áreas de la tecnología como la electricidad y la electrónica.

La diferencia entre los dos tipos de notaciones está en la representación del exponente.

En el caso de la *notación científica* el exponente puede tener cualquier valor.

En el caso de la *notación de ingeniería* debe ser siempre múltiplo de 3, además de que el factor multiplicativo debe estar entre 1 y 1000.

Para expresar cualquier número en notación científica se escribe el número como producto de las cifras significativas escritas con un dígito diferente de cero a la izquierda de la coma decimal y de una potencia de 10.

Por ejemplo, la cantidad de partículas que hay en un mol (número de Avogadro) es $6{,}02 \cdot 10^{23}$ y el radio clásico del electrón es $2{,}82 \cdot 10^{-15}$ m.

Para recordar cómo expresar un número en notación científica se siguen estas pautas:

1. *Para números mayores que 1:* se corre la coma decimal hacia la izquierda hasta dejar un solo dígito a su izquierda;
2. *Para números menores que 1:* se corre la coma decimal hacia la derecha hasta dejarla después del primer dígito distinto de cero;
3. Luego se multiplica por 10^n si se ha trasladado la coma n lugares hacia la izquierda, o por 10^{-n} si se ha trasladado la coma n lugares hacia la derecha.

Ejemplo

Para expresar 20 500 en notación científica movemos la coma cuatro lugares hacia la izquierda y multiplicamos por 10^4 de forma que:

$$20\,500 = 2{,}05 \cdot 10^4$$

Para expresar 0,000037 en notación científica movemos la coma cinco lugares hacia la derecha y multiplicamos por 10^{-5} de forma que:

$$0{,}000037 = 3{,}7 \cdot 10^{-5}$$

Cuando un número se escribe en notación científica se deben incluir los ceros significativos.

Para cambiar un número en notación científica a la notación ordinaria se realiza el proceso inverso: si el exponente de 10 es $-n$, se mueve la coma n lugares hacia la izquierda; si el exponente de 10 es n, se mueve la coma n lugares hacia la derecha.

Ejemplo:

$3{,}27 \cdot 10^7 = 32\,700\,000$

$5{,}24 \cdot 10^{-8} = 0{,}0000000524$

En la calculadora

Para escribir en notación científica se teclea el número decimal, luego la tecla EXP, EE o EEX (según sea el modelo de calculadora) y por último el exponente de 10.

Ejemplo:

Para ingresar $6{,}24 \cdot 10^{-4}$ se teclea **6,24 EXP −4**

En la pantalla aparecerá $6{,}24^{-4}$ o 6,24E-4, según sea el modelo de calculadora, esto no debe confundirse con la operación de elevar 6,24 a la potencia −4.

Producto y Cociente

El producto o cociente de números muy grandes o muy pequeños se simplifica al usar notación científica.

Ejemplo:

El producto de $87\,000\,000 \cdot 470\,000\,000\,000$ puede simplificarse con la notación científica, hacemos

$$87\,000\,000 \cdot 470\,000\,000\,000 = 8{,}7 \cdot 10^7 \cdot 4{,}7 \cdot 10^{11}$$
$$= (8{,}7 \cdot 4{,}7) \cdot (10^7 \cdot 10^{11})$$
$$= 40{,}89 \cdot 10^{7+11}$$
$$= 40{,}89 \cdot 10^{18}$$
$$= 4{,}089 \cdot 10^{19}$$

$$100\,000\,000 \cdot 0{,}0000024 = 1 \cdot 10^8 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-6}$$
$$= (1 \cdot 2{,}4) \cdot (10^8 \cdot 10^{-6})$$
$$= 2{,}4 \cdot 10^{8-6}$$
$$= 2{,}4 \cdot 10^2$$

Unidad 1 - Notación Científica

<u>Actividad N.° 21:</u> Escribir los números en notación científica:

a) 42 000 =
b) 370 000 000 =
c) 0,000038 =
d) 152 000 =
e) 124 000 =
f) 0,0012 =
g) 0,002 =
h) 123 000 =

<u>Actividad N.° 22:</u> Efectuar las siguientes multiplicaciones y divisiones en notación científica:

a) $0{,}025 \cdot 0{,}345 =$
b) $0{,}00045 \cdot 1500 =$
d) $4 \cdot 10^4 : 2 \cdot 10^{-2} =$
e) $5{,}4 \cdot 10^6 : 2{,}7 \cdot 10^{-3} =$

c) $4{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{5} =$ **f)** $84 \cdot 10^{-9} : 42 \cdot 10^{4} =$

Actividad N.° 23: El área de la base de un tanque circular es de 0,000876 m^2. ¿Cuál es el diámetro de la base del tanque expresado en notación científica?

PERÍMETRO – ÁREA – VOLUMEN – DENSIDAD – MASA

El **perímetro** es la **suma de las longitudes de todos los lados de una figura.**

El **área** nos da una idea de cuánta superficie cubre dicha figura.

Arquitectos, ingenieros, diseñadores gráficos y personas en general aplican a diario el cálculo de áreas y perímetros: para saber cuánta pintura hace falta para una habitación, al comprar una casa, al remodelar una cocina o al construir un escritorio.

El volumen es el espacio que ocupa un cuerpo. En un prisma rectangular se calcula multiplicando el largo, el ancho y la altura. El volumen sirve, por ejemplo, para calcular la cantidad de agua que cabe en una piscina.

Las fórmulas que se usan en las actividades de esta sección son las siguientes (r: radio; h: altura; g: generatriz; ap: apotema de la cara lateral de la pirámide):

Figura o cuerpo	Perímetro o área	Volumen
Rectángulo de base b y altura h	$P = 2(b+h) \quad A = b \cdot h$	—
Triángulo de base b y altura h	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	—
Círculo	$L = 2\pi r \quad A = \pi r^2$	—
Prisma rectangular (largo l, ancho a, altura h)	$A_{\text{total}} = 2(la + lh + ah)$	$V = l \cdot a \cdot h$
Cilindro	$A_{\text{lateral}} = 2\pi rh \quad A_{\text{total}} = 2\pi r(h+r)$	$V = \pi r^2 h$
Pirámide de base cuadrada de lado l	$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \frac{l \cdot ap}{2} \quad A_{\text{total}} = l^2 + A_{\text{lateral}}$	$V = \frac{l^2 \cdot h}{3}$
Cono	$A_{\text{lateral}} = \pi rg \quad A_{\text{total}} = \pi r(g+r)$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

En la pirámide, la apotema de la cara lateral se obtiene con el teorema de Pitágoras: $ap = \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$.

La densidad (δ) es la razón entre la masa (m) y el volumen (v) de una sustancia.

$$\boxed{\delta = \frac{m}{v}}$$

El concepto de densidad es de mucha importancia en el campo de la física y de la química.

La unidad de densidad del Sistema Internacional es el kilogramo por metro cúbico (kg/m^3); también se usa el gramo por centímetro cúbico (g/cm^3) y, para gases, g/dm^3 o g/L.

La densidad es una propiedad intensiva, ya que no varía con la cantidad de sustancia, por ejemplo, la densidad del agua es de 1000 kg/m^3.

Si se tienen 100 kg o 10 000 kg de agua, el valor de la densidad es el mismo, ya que al aumentar la masa también aumenta el volumen.

La densidad también es un nexo importante para transformar masa a volumen o viceversa.

Ejemplo: ¿Qué volumen necesitamos para tener 30 g de ácido sulfúrico si su densidad es de 1,84 g/cm^3?

$$\delta = \frac{m}{v} \quad \text{si despejamos volumen } (v)$$

$$v = \frac{m}{\delta}$$

Reemplazamos los valores de la masa y de la densidad:

$$v = \frac{30\ gr}{1{,}84\ gr/cm^3} = \mathbf{16{,}30\ cm^3}$$

Lo mismo ocurre si se pretende calcular la masa, por ejemplo, la densidad del aluminio es de 2,7 g/cm^3 y el volumen es de 225,18 cm^3

$$m = v \cdot \delta$$

Reemplazamos con los valores de la densidad y el volumen:

$$m = 2{,}7\frac{gr}{cm^3} \cdot 225{,}18\ cm^3 = \mathbf{608\ gr}$$

Unidad 1 - Perímetro, Área, Volumen

<u>Actividad N.° 24:</u> Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) La densidad del etanol es de 0,798 g/mL. Calcular la masa de 17,4 mL del líquido.

b) La densidad de un alcohol es 0,8 g/cm^3. Calcular el volumen de 1600 g de alcohol.

c) Calcular la densidad de un cuerpo que tiene de volumen 2 cm^3 y una masa de 25 g.

d) Calcular la masa de un cubo macizo de 10 cm de lado cuya densidad es de 2,34 g/cm^3.

e) En un laboratorio de suelos, se toma una muestra de fertilizante granulado utilizada en un cultivo de maíz. La muestra tiene una masa de 1,8 kg y ocupa un volumen de 1,5 litros.
Calcular la densidad del fertilizante en kg/L.

f) Un ingeniero agrónomo necesita calcular la masa de agua almacenada en un tanque para riego por goteo. Si el tanque contiene 2,5 m^3 de agua y la densidad del agua es de aproximadamente 1000 kg/m^3, ¿cuál es la masa de agua contenida en el tanque?

Porcentaje

Los **porcentajes** son una forma de presentar información numérica. Se utilizan en muchas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo: los negocios los utilizan para informar el descuento que tendrá un determinado producto, en la preparación de mezclas de ciertas sustancias, etc. Los diarios están llenos de estadísticas presentadas en forma porcentual.

Un **porcentaje** es el número de partes que se toman de un todo que se ha dividido en 100 partes iguales.

El 1% de un todo es su centésima parte, es decir cada una de las partes que se obtienen al dividir el todo en 100 partes iguales.

Ejemplo: Si en 90 L de una solución hay 2 % de ácido, ¿cuántos litros de ácido hay?

Debemos calcular el 2 % de 90 L:

$$2\%\ de\ 90\ L = 90\ L\ \cdot \frac{2}{100} = 1{,}8\ L$$

Regla práctica:

Para calcular el a % de una cantidad x podemos multiplicar el porcentaje por la cantidad y luego correr la coma decimal dos lugares hacia la izquierda (lo que es equivalente a dividir por 100)

- Para calcular el 5% de 120 hacemos $120 \cdot 5 = 600$ y luego corremos la coma dos lugares hacia la izquierda. Es decir, el 5% de 120 es 6.
- Para calcular el 20% de 120 podríamos multiplicar 120 por 20 y luego correr la coma dos lugares, pero más fácil es multiplicar 120 por 2 y correr la coma un solo lugar: $120 \cdot 2 = 240$. Corriendo la coma un lugar obtenemos que el 20% de 120 es 24.

Unidad 1 - Porcentaje

<u>Actividad N.° 25:</u> Calcular los siguientes porcentajes:

a) ¿Cuánto es el 11% de 3500?
b) Las máquinas de un establecimiento que se adquirieron por $2400, sufren una depreciación del 4% anual. ¿Cuánto valdrán el segundo año?
c) Los importes del primer y del segundo vencimiento de una factura de gas son $225 y $252, respectivamente. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento?
d) En una prueba de germinación de semillas de trigo, se sembraron 100 semillas.
Después de varios días, 85 semillas germinaron.
   1. Calcular el porcentaje de semillas germinadas.
   2. ¿Cuántas semillas no germinaron?

<u>Actividad N.° 26:</u> Calcular los siguientes porcentajes sin calculadora:

a) 36% de 125 =
b) 15% de 280 =
c) 8% de 400 =

<u>Actividad N.° 27:</u> Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) Un campo rectangular tiene 2,08 hm de largo y 15,6 dm de ancho. ¿Cuántos metros de alambre se necesitarán para cercarlo sabiendo que se ponen tres hileras de alambre?

b) Cuando se colocan en un recipiente 3 dm^3, 10 cL y ½ L de agua, se llenan los 2/3 de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad total?

c) ¿Cuál es la longitud del piolín necesario para atar una caja de 0,60 m de largo, 40 cm de ancho y 35 cm de alto, contando además 0,15 m para el nudo?

d) Calcular el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que tiene 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2500 mm de alto.

e) Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1,5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de $6 el metro cuadrado.

1. ¿Cuánto costará pintarla?
2. ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla?

f) ¿Cuántas losetas cuadradas de 20 cm de lado se necesitan para recubrir las caras de una piscina de 10 m de largo por 6 m de ancho y de 3 m de profundidad?

g) En un almacén de dimensiones de 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas, las cuales tienen una dimensión de 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¿Cuántas cajas podremos almacenar?

h) Calcular la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 potes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.

i) Un cilindro tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base, y esa altura mide 125,66 cm.
Calcular:

1. El área total
2. El volumen.

j) Calcular el área lateral, total y el volumen de una pirámide cuadrangular de 10 cm de arista básica y 12 cm de altura.

k) Para una fiesta, Luis ha hecho 10 gorros de forma cónica con cartón. ¿Cuánto cartón habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de generatriz?

AUTOEVALUACIÓN

Escanear el siguiente código o usar el enlace para realizar la autoevaluación de la unidad 1.

Autoevaluación Unidad 1

UNIDAD Nº2: ECUACIONES

Ecuaciones

La posibilidad de resolver un problema a menudo depende de la posibilidad de escribir una ecuación para el problema y luego resolver la ecuación.

Una **ecuación** es una igualdad que contiene una o más incógnitas. Resolverla es hallar los valores de la incógnita que la verifican; cada uno de ellos se llama **solución** o **raíz** de la ecuación.

Algunas ecuaciones se verifican para todos los valores de sus variables: se llaman identidades.

Una **identidad** es una igualdad algebraica que se verifica para todos los valores asignados a las variables.

Ejemplo:

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$$
$$Si\ a=2\ \ y\ \ b=1$$
$$(2-1)\cdot(2+1)=2^2-1^2$$
$$(1)\cdot(3)=4-1$$
$$3=3$$

Para resolver una ecuación, transformamos la ecuación original en otra más simple.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones ***son equivalentes*** si tienen exactamente el mismo ***conjunto solución*** (es decir las mismas raíces).

Para pasar de una ecuación a una ecuación equivalente vamos a efectuar las siguientes operaciones:

1. Si a ambos miembros de una ecuación se suma o resta un mismo número o la misma expresión algebraica se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

$$A=B \Leftrightarrow A+c=B+c$$

2. Si ambos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un mismo número, distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente a la dada. (No se puede dividir por cero: si se divide por una expresión algebraica, esta tiene que ser distinta de cero).

$$A=B \Leftrightarrow A\cdot c=B\cdot c$$
$$Con\ c\neq 0$$

3. Se pueden agrupar los términos semejantes en cualquier miembro de la ecuación.
4. Se pueden intercambiar los dos miembros de la ecuación, de modo que la incógnita quede a la izquierda.

Para resolver una ecuación generalmente tenemos que emplear una combinación de estas operaciones. A veces hay que utilizar la misma operación más de una vez.

Ejemplo:

$$x-9=10$$

$$x - 9 + 9 = 10 + 9 \quad (Se\ suma\ 9\ en\ ambos\ miembros)$$

$$x = 19$$

Si se reemplaza en la ecuación original el valor $x = 19$, se verifica la igualdad:

$$19 - 9 = 10$$

Ejemplo:

$$3x = -15$$
$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(-15) \quad \left(Se\ multiplican\ ambos\ miembros\ por\ \frac{1}{3}\right)$$
$$x = -5$$

Si se reemplaza en la ecuación original, se observa que la verifica.

Ejemplo:

$$3x + 27 = 6x$$
$$3x + 27 - 3x = 6x - 3x \quad (Se\ resta\ en\ ambos\ miembros\ 3x)$$
$$27 = 3x \quad (Se\ intercambian\ los\ dos\ miembros\ de\ la\ ecuación\ 3x = 27)$$
$$3x = 27$$
$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(27) \quad \left(Se\ multiplica\ por\ \frac{1}{3}\right)$$
$$x = 9$$

Una ecuación de primer grado, o lineal, es aquella cuya forma general es:

$$ax + b = 0, \text{ con } a \neq 0$$

A continuación, veremos un par de ejemplos de resolución de ecuaciones de primer grado:

Ejemplo 1:

$$-3\left(2x - \frac{5}{6}\right) = \left(-\frac{5}{4}x + 3\right) : \frac{1}{2}$$
$$-6x + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}x + 6$$
$$-\frac{7}{2}x = \frac{7}{2}$$
$$\boldsymbol{x = -1}$$

Ejemplo 2:

$$2x - 3 + 3\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}\right) = x - \frac{5}{4}(x - 1)$$
$$2x - 3 + 2x - \frac{1}{2} = x - \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$$
$$4x + \frac{1}{4}x = \frac{5}{4} + \frac{7}{2}$$
$$\frac{17}{4}x = \frac{19}{4}$$
$$\boldsymbol{x = \frac{19}{17}}$$

La habilidad de resolver ecuaciones es útil solo si somos capaces de captar un problema y escribirlo en la forma de una o más ecuaciones.

La mayoría de los problemas que tenemos que resolver en el trabajo son problemas verbales. Alguien nos dirá acerca de un problema que quiere que resolvamos y escribirá parte o todo el problema. Primero tendremos que comprender ese problema verbal y organizarlo de modo que sea fácil de entender; luego veremos cuál es el problema y decidiremos cuál información es importante y cuál no. Una vez entendido, plantearemos la ecuación. Cuando hayamos escrito la o las ecuaciones, la parte más difícil habrá quedado atrás. Todo lo que resta es resolver las ecuaciones y comprobar los resultados.

Sugerencias para resolver problemas:

1. Leer con cuidado el problema. Asegurarse de entender lo que pide el problema. Puede ser necesario leerlo varias veces para entenderlo perfectamente.
2. Identificar claramente las cantidades desconocidas. Identificar cada cantidad desconocida con una variable. Anotar lo que quiere decir cada letra. Por ejemplo: se puede usar **e** para espacio o **t** para tiempo.
3. De ser posible, representar todas las incógnitas en términos de una sola variable.
4. Hacer un esquema o dibujo si ello aclara el problema.
5. Analizar con cuidado el problema. Tratar de escribir una ecuación que muestre cómo se relacionan todas las cantidades conocidas y desconocidas. Si no es posible escribir una sola ecuación, usar más.
6. Resolver la ecuación y comprobar el resultado con el problema original.

A continuación, veremos cómo resolver algunas situaciones problemáticas.

Ejemplo: Si un avión vuela a 785 km/h durante 4,5 h, ¿qué distancia recorrerá?

Usamos la fórmula de $\boxed{e = v \cdot t}$
El enunciado da la velocidad y el tiempo, así que solo hay que reemplazar en la ecuación:

$$e = v \cdot t$$

$$e = 785\frac{Km}{h} \cdot 4{,}5\ h$$

$$\boldsymbol{e = 3532{,}5\ Km}$$



UNIDAD 2 - Ecuaciones

INECUACIONES

Se llama ***inecuación*** a toda desigualdad algebraica que solamente se satisface para ciertos valores de sus incógnitas.

Trabajaremos con inecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolver una inecuación es encontrar todos los valores de la incógnita que la verifican, y el conjunto solución es un intervalo real o vacío.

Una inecuación se resuelve como una ecuación, salvo cuando se multiplican o dividen ambos miembros por un número negativo: en ese caso, la desigualdad cambia de sentido.

Reglas para resolver una inecuación

1. Si se suma o resta el mismo número a ambos miembros de la desigualdad se obtiene una desigualdad equivalente:

$$A < B \Leftrightarrow A + c < B + c$$

2. Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un mismo número positivo, se obtiene una desigualdad equivalente:

$$A \geq B \Leftrightarrow A \cdot c \geq B \cdot c \quad si\ c > 0$$

3. Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un mismo número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

$$A \geq B \Leftrightarrow A \cdot c \leq B \cdot c \quad si\ c < 0$$

UNIDAD 2 - Inecuaciones

Ejemplos:

a)

$6x < 8x + 2$
$6x - 8x < 8x - 8x + 2$
$-2x < 2$
$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) > 2\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad x > -1$
El conjunto solución es $(-1\,, +\infty)$

b)

$4x > 8$
$\frac{1}{4} \cdot 4x > \frac{1}{4} \cdot 8$
$x > 2$
El conjunto solución es $(2\,, +\infty)$

Actividad N.° 1: Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $(5 - 2x)(3x - 7) + (3x - 5)(2x - 7) + 30 = 5x$
b. $\frac{9-7x}{20} = \frac{13-5x}{11}$
c. $\frac{25x-17}{11} = \frac{17x-15}{7}$
d. $\frac{3}{4} - \frac{2-3x}{3} + \frac{x}{2} = x - \frac{5}{10}$
e. $1 - \frac{8-7x}{5} = -\frac{14}{5}x$

f. $4+\frac{4-4x}{5x}=0$

g. $\frac{2-x}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{5+4x}{2x}$

h. $2+\frac{6-10x}{3x}+\frac{5}{6}=0$

i. $\frac{4x-4}{8x}+\frac{3}{2x}=\frac{2x+6}{8x}+\frac{1}{2x}$

j. $\frac{2x+3}{2x+5}=\frac{5x+4}{5x+2}$

k. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-1}=0$

l. $\frac{3}{x}+\frac{4}{x}=3$

Actividad N.° 2: Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) ¿Cuál es el número cuya tercera parte sumada a su quinta parte es igual a 40?
b) ¿A qué número hay que restarle $\frac{6}{5}$ para que la diferencia sea igual a su quinta parte?
c) Un jardín rectangular tiene 25 m de ancho. Si su área es de 1125 m^2, ¿cuál es su largo?
d) La suma de tres números enteros consecutivos es de 48, ¿cuánto vale cada número?
e) De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después, la tercera parte del resto, y aún quedan 1600 litros. Calcular la capacidad del depósito.
f) A un niño le preguntan la edad de su padre y contesta: si al doble de mi edad se le suman 6 veces mi misma edad y a la mitad de esa suma se le quita 18, resulta la edad de mi padre. El niño tiene ahora 15 años, ¿cuántos años tiene el padre?
g) En un rectángulo de 68 cm de perímetro, la base es 5 cm mayor que la altura. ¿Cuál es la longitud de la altura?
h) La suma de un número entero y su siguiente es 53. ¿Cuál es el número?
i) La edad de la nieta es un tercio de la edad de la abuela y la diferencia de edades es 48. ¿Cuántos años tiene la abuela?
j) Un camión cisterna descargó $\frac{1}{3}$ de su contenido en la primera estación, $\frac{1}{5}$ de lo que quedaba en la segunda y los 16 litros restantes en la tercera. ¿Cuál es el contenido del camión?
k) Partir el número 40 en dos sumandos de manera que si el mayor se divide por el menor se obtiene de cociente 2 y resto 1.
l) En un triángulo isósceles de 42,5 cm de perímetro, el lado desigual mide la mitad de cada uno de los lados iguales. ¿Qué longitud tiene cada lado del triángulo?
m) Si al cuádruple de un número se le suma 2 se obtiene la diferencia entre su mitad y 5. ¿Cuál es el número?
n) Las entradas para un recital se venden con varios días de anticipación. El primer día se vende la mitad, el segundo el 60 % de lo que queda y el tercero el 40 % del sobrante. Quedan aún 384 entradas. ¿Cuántas entradas se pusieron en venta?

Actividad N.° 3: Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $2x-5>-10$ b) $5x-2>3x+8$

c) $6-x<9$ d) $-9x+3x\geq -24$

e) $5x+2\leq 3x+9$ f) $2x-7\geq 15x-8$

Actividad N.° 4: Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) ¿Cuáles son los números que, aumentados en 7 unidades, son menores que el doble de 5?
b) La edad de Juan es un múltiplo de 5 menor que 80 y mayor que 50. ¿Cuántos años puede tener Juan?
c) Para un trabajo se pide que los postulantes tengan más de la mitad de la edad del jefe, que tiene 44 años, pero menos de 35. ¿Cuáles son las edades posibles de los postulantes?

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ecuaciones Exponenciales

Una ecuación en la que la variable aparece en un exponente se denomina ecuación exponencial.

Para resolver una ecuación exponencial hay que recordar las siguientes propiedades de potencia:

- $a > 0 \qquad a^0 = 1 \qquad a^1 = a$
- $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

UNIDAD 2 - Ecuaciones Exponenciales

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación exponencial

a) $2^{2x-1} = 4$

$2^{2x-1} = 2^2$

$2x - 1 = 2$

$2x = 2 + 1$

$x = \frac{3}{2}$

b) $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$

$3^{1-x^2} = \frac{1}{3^3}$

$3^{1-x^2} = 3^{-3}$

$1 - x^2 = -3$

$x^2 = 4$

$\boldsymbol{x = \pm 2}$

Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita aparece afectada por un logaritmo y las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita aparece como potencia. Para resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales se deben recordar las propiedades de los logaritmos vistas en la unidad 1.

Ejemplos de ecuaciones exponenciales

a) $2^x = 16$ Se aplica logaritmo en base 2 a ambos miembros: $x \cdot \log_2 2 = \log_2 16 \implies x \cdot 1 = 4 \implies x = 4$

b) $5 \cdot 2^x + 2^x \cdot 2^2 = 18$

$5 \cdot 2^x + 2^x \cdot 2^2 = 18$ Se saca factor común 2^x

$2^x(5 + 2^2) = 18$

$2^x \cdot 9 = 18$

$2^x = \frac{18}{9}$

$2^x = 2$

$x = 1$

c) $3 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 3 = 0$ Hacemos un cambio de variable (la ecuación de segundo grado que resulta se estudia más adelante en esta unidad); llamamos $z = 2^x$

$$2^{2x} = (2^x)^2$$

$3 \cdot z^2 - 6 \cdot z + 3 = 0$ Resolviendo la ecuación de segundo grado, se tiene que $z_1 = z_2 = 1$

Recordemos que $z = 2^x \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow \boldsymbol{x = 0}$

Ejemplos de ecuaciones logarítmicas

d) $\log_5(x - 2) = 0$ Aplicando la definición de logaritmo queda

$5^0 = x - 2 \implies 1 = x - 2 \implies 1 + 2 = x$

$\boldsymbol{x = 3}$

e) $\log_4^2 x + 3 \log_4 x + 2 = 0$ Hacemos cambio de variable y llamamos $\log_4 x = z$

$\log_4^2 x = z^2$

$z^2 + 3 \cdot z + 2 = 0$ Resolviendo la ecuación de segundo grado resulta $z_1 = -1$ y $z_2 = -2$

$\log_4 x = -1 \implies 4^{-1} = x \implies \boldsymbol{x = \frac{1}{4}}$

$\log_4 x = -2 \implies 4^{-2} = x \implies \boldsymbol{x = \frac{1}{16}}$

f) $\log_{\sqrt{6}}(x + 5) = 2 - \log_{\sqrt{6}} x$

$\log_{\sqrt{6}}(x + 5) + \log_{\sqrt{6}} x = 2$

$\log_{\sqrt{6}}[(x + 5) \cdot x] = 2$

$\left(\sqrt{6}\right)^2 = x^2 + 5x$ es decir: $6 = x^2 + 5x$

$x^2 + 5x - 6 = 0$ Resolviendo la ecuación de segundo grado tendremos

$\boldsymbol{x_1 = 1}$ y $\boldsymbol{x_2 = -6}$

Al verificar las soluciones, vemos que $\boldsymbol{x_2 = -6}$ carece de sentido, pues el logaritmo está definido solo para **números positivos.**

UNIDAD 2 - Ecuaciones Logarítmicas

Actividad N.° 5: I) Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales

$$3^{5x+2} = 243$$

$$16^{5-x} = 5$$

$$8^{x-2} - 0{,}125 = 0$$

$$8^{2x} : 2^{9x} = \frac{1}{64}$$

$$10^{x-2} + 10^{x-4} + 10^{x} = 10101$$

II) Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas

$$\log_{12}(4x + 2) = 0$$

$$\log_2 8x + \log_2 4x^2 = 8$$

$$\log_5(x + 12) - \log_5(x + 2) = 1$$

$$\log(x - 3) + \log x = \log 4$$

$$\log(x - 8) + \log(x - 2) = \log(8 - x)$$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado tiene la forma

$ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b y c números reales y $a \neq 0$.

$ax^2 =$ *Término cuadrático* $\quad bx =$ *Término lineal* $\quad c =$ *Término independiente*

Cálculo de las raíces de una ecuación de segundo grado

A continuación, analizaremos distintas situaciones para resolver una ecuación cuadrática:

1. Si la ecuación es de la forma $x^2 = c$, con $c \geq 0$: $x^2 = c \implies x = \pm\sqrt{c}$

Ejemplo:

a. $x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

b. $(x-3)^2 = 2$

$$x - 3 = \pm\sqrt{2}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{2}$$

Las soluciones son: $\boldsymbol{x_1 = 3 + \sqrt{2}}$ y $\boldsymbol{x_2 = 3 - \sqrt{2}}$

2. Si la ecuación es de la forma $x^2 + bx + c = 0$, para obtener un cuadrado perfecto se suma en ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Si el coeficiente de x^2 no es 1, primero se saca factor común (Ejemplo 2). Este método se llama "completar cuadrados".

Ejemplo 1:

$x^2 - 4x - 5 = 0$	Ecuación dada
$x^2 - 4x = 5$	Se suma 5 en ambos miembros
$x^2 - 4x + 4 = 5 + 4$	Se completan cuadrados: $\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = (-2)^2 = 4$
$(x-2)^2 = 9$	Cuadrado perfecto
$x - 2 = \pm\sqrt{9}$	Obtención de la raíz cuadrada
$x = 2 \pm 3$ $\Longrightarrow x_1 = 2 + 3 \Longrightarrow x_1 = 5$ $\Longrightarrow x_2 = 2 - 3 \Longrightarrow x_2 = -1$	Obtención de las raíces

Ejemplo 2:

$3x^2 - 12x + 6 = 0$	Ecuación dada
$3x^2 - 12x = -6$	Se resta 6 en ambos miembros
$3(x^2 - 4x) = -6$	Se saca factor común 3
$3(x^2 - 4x + 4) = -6 + 3 \cdot 4$	Se completan cuadrados: $\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = (-2)^2 = 4$. Se suma 4 dentro del paréntesis, que equivale a sumar 3·4 en ambos miembros
$3(x-2)^2 = 6$	Cuadrado perfecto
$(x-2)^2 = 6:3$	Se divide por 3 en ambos miembros
$x - 2 = \pm\sqrt{2}$	Obtención de la raíz cuadrada
$x = 2 \pm \sqrt{2}$	Obtención de las raíces

Caso general: para deducir la fórmula resolvente de $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, aplicamos el siguiente procedimiento:

$ax^2 + bx + c = 0$ $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Longrightarrow$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	Factoreamos a para que x^2 quede sola. Como $a \neq 0$, el producto solo puede ser cero si el polinomio es igual a cero.

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$	Sumamos y restamos "lo mismo" para mantener la igualdad. Como queremos obtener un binomio al cuadrado, completamos cuadrados.
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$	Trinomio cuadrado perfecto: $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$. Operamos y despejamos el binomio al cuadrado.
$\left\|x+\frac{b}{2a}\right\|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$	Recordar que al resolver la raíz de un binomio al cuadrado queda su valor absoluto.
$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	Al quitar el valor absoluto, el resultado puede quedar positivo o negativo (para ahorrar espacio se ponen los dos signos juntos: "±"). Lo único que queda es despejar la x. Esta fórmula se denomina "fórmula resolvente" y será aplicada de aquí en más para hallar las raíces de la ecuación de segundo grado.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo 3: Calcular las raíces de la ecuación $x^2+2x-3=0$

Observamos que: $a=1,\quad b=2\quad y\quad c=-3$

Reemplazamos en la fórmula resolvente:

$$\boxed{\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}$$

Entonces los valores de las raíces son:

$$x_1=\frac{-2+4}{2}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x_1=1}$$

$$x_2=\frac{-2-4}{2}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x_2=-3}$$

UNIDAD 2 - Ecuaciones Cuadráticas

Cálculo del discriminante.

Al radicando b^2-4ac, se lo denomina discriminante, ya que el valor del mismo sirve para determinar la naturaleza de las raíces y se lo simboliza con la letra griega delta Δ.

$$\Delta=b^2-4ac$$

De acuerdo al valor que tome Δ podemos decir cómo son las raíces:

- Si $\Delta > 0$ entonces las raíces son **reales y distintas**.
- Si $\Delta = 0$ entonces las raíces son **reales e iguales**.
- Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene raíces reales (sus raíces son complejas conjugadas).

A continuación, veremos un ejemplo de cada una de las situaciones planteadas:

$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
$x^2 - 5x + 6 = 0$ $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$ $\Delta = 25 - 24$ $\Delta = 1$ Las raíces son reales y distintas.	$x^2 - 2x + 5 = 0$ $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$ $\Delta = 4 - 20$ $\Delta = -16$ Las raíces son complejas conjugadas.	$9x^2 + 6x + 1 = 0$ $\Delta = (6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1$ $\Delta = 36 - 36$ $\Delta = 0$ Las raíces son reales e iguales.

UNIDAD 2 – Discriminante

Propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática

Si una ecuación de segundo grado tiene:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

La ecuación se puede escribir en forma factoreada como:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Aplicamos propiedad distributiva:

$$a \cdot x^2 - a \cdot x \cdot x_2 - a \cdot x_1 \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$a \cdot x^2 - a \cdot (x_1 + x_2) \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$$

Para que esta ecuación sea igual que (1), hace falta que se cumpla:

$$b = -a \cdot (x_1 + x_2)$$

$$c = a \cdot x_1 \cdot x_2$$

Entonces llegamos a que:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

A continuación, veremos un ejemplo:

- Reconstruir la ecuación de segundo grado cuyas raíces son:
  $x_1 = -\frac{2}{3}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6} = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} = -\frac{5}{6}$$
$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{6}{6} = -1 = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{a} = -1$$

Entonces:

$$\boxed{x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0}$$



UNIDAD 2 – Ecuaciones de Segundo Grado

Actividad N.° 6: Calcular las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 - 8x + 6 = 0$ b) $-x^2 + 2x + 3 = 0$

c) $x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{1}{2} = 0$ d) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{12} = 0$

e) $x^2 + 11x = 0$ f) $5x^2 - 30x = 0$

Actividad N.° 7: Analizar el discriminante y determinar el tipo de solución que tienen las ecuaciones:

a) $x^2 + 7x - 4 = 0$ b) $x^2 - 2x + 6 = 0$

c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ d) $3x^2 + 7 = 0$

e) $3x^2 + 6x + 15 = 0$ f) $4x^2 - 16x - 48 = 0$

Actividad N.° 8: Calcular el o los valores de k para los cuales las siguientes ecuaciones tienen dos raíces reales e iguales y escribir la ecuación resultante:

a) $x^2 + 2kx + k = 0$ b) $x^2 + (k-1)x - k = 0$

c) $2x^2 - x - k = 0$

Actividad N.° 9: Reconstruir las siguientes ecuaciones de segundo grado conociendo las raíces:

a) $x_1 = \frac{2}{3}$ y $x_2 = \frac{5}{9}$

b) $x_1 = 0$ y $x_2 = -\frac{7}{2}$

c) $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Actividad N.° 10: Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) Descomponer el número 9 en dos números positivos tales que el triplo del cuadrado de uno de ellos supere al séxtuplo del otro en 18 unidades.
b) Calcular la diagonal de un rectángulo sabiendo que la base es igual a las tres cuartas partes de la altura y el área es de 48 cm^2.
c) El área y el perímetro de un rectángulo son respectivamente 189 cm^2 y 57 cm. Calcular la longitud de su diagonal.

ECUACIÓN LINEAL

Una recta en el plano se puede representar algebraicamente mediante una ecuación de la forma:

$$ax + by = c$$

Una ecuación de este tipo se conoce como **ecuación lineal** en las variables **x** e **y.**

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema formado por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas representa dos rectas en el plano; resolverlo es hallar la intersección de ambas, es decir, el conjunto solución.

Consideramos el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ son números dados.

Un sistema puede ser **compatible** o **incompatible**.

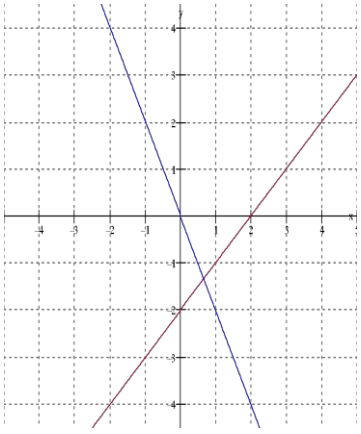
De ser *compatible* puede tener solución única o infinidad de soluciones. Si es *incompatible* no tiene solución, en este caso las rectas son paralelas.

Solución del Sistema

- *Compatible*
  - Determinado — Solución Única
  - Indeterminado — Infinitas Soluciones
- *Incompatible* — No tiene Solución

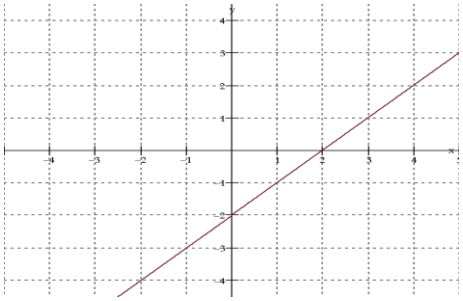
A continuación, veremos algunos ejemplos de cómo serían las gráficas en cada uno de los casos.

Sistema compatible
Determinado: ***Solución Única***
Las rectas se cortan en un punto.



Sistema Compatible
Indeterminado: ***Infinitas soluciones***

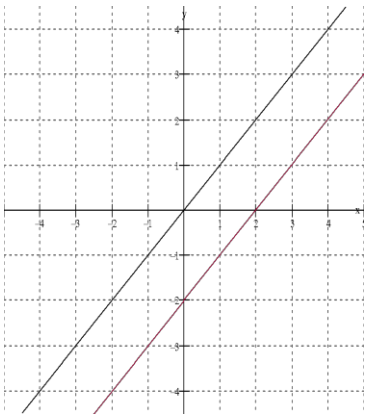
Las rectas son coincidentes.



Sistema Incompatible

No tiene Solución

Las rectas son paralelas.



Para resolver analíticamente un sistema de ecuaciones existen varios métodos. Todos ellos permiten obtener el mismo resultado, y la utilización de uno u otro dependerá de cómo esté planteado el sistema original.

Los métodos analíticos que han visto en la escuela secundaria son:

- Método de Sustitución
- Método de Igualación
- Método de Reducción por Suma o Resta
- Método de Determinantes o Regla de Cramer

A continuación, desarrollaremos cada uno de ellos para recordarlos.

Método de Sustitución

Se debe despejar una de las variables en una de las ecuaciones, y luego reemplazarla en la otra ecuación

Regla:

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones del sistema
2. Se sustituye en la otra ecuación la misma incógnita por la expresión hallada, para obtener una ecuación de primer grado con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación resultante, para determinar el valor de su incógnita.
4. Se reemplaza el valor hallado, en la expresión de la incógnita despejada en el primer paso, para obtener el valor de dicha incógnita.

5. Se verifica si el par de valores hallado es solución del sistema.

Observación: El método se basa en que la sustitución de las incógnitas se efectúa para un mismo valor en ambas ecuaciones, es decir, para el par de valores que satisface el sistema.
Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 & (\boldsymbol{a}) \\ 3x - y = 2 & (\boldsymbol{b}) \end{cases}$$

Se despeja x de la ecuación $(\boldsymbol{a})$ **:** $x = 2 - y$

Se reemplaza la x por $2 - y$ en la ecuación $(\boldsymbol{b})$**:** $3 \cdot (2 - y) - y = 2$

Se resuelve la ecuación, obteniendo el valor de y:

$$6 - 3y - y = 2 \quad \Rightarrow \quad -4y = 2 - 6 \quad \Rightarrow \quad -4y = -4 \quad \Rightarrow \quad y = -4 : (-4) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = 1}$$

Con el valor obtenido de y, se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones y se calcula el valor de x:

$$x = 2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 1}$$

La solución del sistema es $\boxed{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1})}$

Método de Igualación

Para aplicar este método se despeja la misma incógnita de ambas ecuaciones y luego se igualan.

Regla:

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones del sistema.
2. Se igualan los segundos miembros de las igualdades obtenidas para formar una ecuación de primer grado con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación resultante para determinar el valor de su incógnita.
4. Se procede de igual modo con respecto a la otra incógnita.
5. Se verifica si el par de valores hallado es solución del sistema.

Observación: El método de igualación se funda en que se igualan las incógnitas suponiendo que representan los valores de la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 & (\boldsymbol{a}) \\ 2x - y = 3 & (\boldsymbol{b}) \end{cases}$$

Se despeja x de ambas ecuaciones.

$$(\boldsymbol{a}) \quad 3x = 2y + 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2y + 4}{3}$$

$$(\boldsymbol{b}) \quad 2x = y + 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y + 3}{2}$$

Se igualan las ecuaciones $(\boldsymbol{a})$ y $(\boldsymbol{b})$ y se calcula el valor de y**.**

$$\frac{2y + 4}{3} = \frac{y + 3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot (2y + 4) = 3 \cdot (y + 3)$$

$$\Rightarrow \quad 4y + 8 = 3y + 9$$

$$\Rightarrow \quad 4y - 3y = 9 - 8$$
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{y = 1}$$

Se reemplaza el valor de y obtenido en cualquiera de las 2 ecuaciones y se calcula el valor de x:

$$x = \frac{2 \cdot 1 + 4}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 + 4}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 2}$$

De esta manera, el conjunto solución es $\boxed{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1})}$

Método de Reducción Por Suma o Resta

La aplicación del método de reducción por suma o resta se puede resumir de la siguiente manera:

Regla:

1. Se **iguala** el valor absoluto de los coeficientes de una misma incógnita en las dos ecuaciones multiplicando cada ecuación por el valor absoluto del coeficiente de dicha incógnita perteneciente a la otra ecuación.
2. Si los coeficientes de la incógnita elegida tienen **distinto o igual signo** se suman o restan las ecuaciones obtenidas, respectivamente, para reducir (o eliminar) dicha incógnita.
3. Se procede de forma similar con respecto a la incógnita eliminada.
4. Se verifica si el par de valores hallado es solución del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 5x - 4y = 2 & (\boldsymbol{a}) \\ 3x - 2y = 2 & (\boldsymbol{b}) \end{cases}$$

Se multiplica la ecuación $(\boldsymbol{a})$ por 3 y la ecuación $(\boldsymbol{b})$ por 5 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 15x - 12y = 6 & (\boldsymbol{a}) \\ 15x - 10y = 10 & (\boldsymbol{b}) \end{cases}$$

Como los coeficientes de x son iguales, se restan miembro a miembro las ecuaciones para eliminar x:

$$\begin{array}{rl} 15x - 12y = 6 & (\boldsymbol{a}) \\ -15x + 10y = -10 & (\boldsymbol{b}) \end{array}$$

$$-2y = -4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = 2}$$

Se reemplaza el valor de y obtenido en cualquiera de las 2 ecuaciones, y se calcula el valor de x:

$$15x - 12y = 6 \quad \Rightarrow \quad 15x = 6 + 12y \quad \Rightarrow \quad 15x = 6 + 12 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 15x = 30 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{30}{15}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 2}$$

El conjunto solución es $\boxed{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{2})}$

Método de Determinantes o Regla de Cramer

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de ellas puede obtenerse como cociente de determinantes.

Todo determinante de segundo orden es igual al producto de los números pertenecientes a la diagonal principal menos el producto de los números pertenecientes a la diagonal secundaria.

Ejemplo: Dados los números 8, 3, 1, y 2, se dispone de la forma que sigue

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 16 - 3 = 13$$

Este determinante formado por cuatro números se llama de segundo orden.

Regla:

Dado un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, igualmente ordenada, el valor de cada incógnita es el de una fracción que tiene por denominador el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas, y por numerador el determinante que se obtiene reemplazando en el anterior los coeficientes de la incógnita cuyo valor se quiere hallar por los términos independientes respectivos que figuran en el segundo miembro.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 4x - 3y = -7 \\ 6x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-7 \cdot 2 - 9 \cdot (-3)}{4 \cdot 2 - 6 \cdot (-3)} = \frac{-14 + 27}{8 + 18} = \frac{13}{26} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4 \cdot 9 - 6 \cdot (-7)}{4 \cdot 2 - 6 \cdot (-3)} = \frac{36 + 42}{8 + 18} = \frac{78}{26} \Longrightarrow y = 3$$

El conjunto solución es $\boxed{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{3})}$

UNIDAD 2 – Sistemas de Ecuaciones

<u>Actividad N.° 11:</u> Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 5y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 7y = 36 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - \frac{y}{2} = \frac{7}{2} \\ 4x - \frac{1}{5}y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{y}{2} + x = -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{4}x - 2y = \frac{3}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x - 2) + 4y = -6 \\ 4y + 8 = 20 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0{,}7x - 0{,}9y = -\frac{3}{10} \\ 1{,}1x - 0{,}12y = 6 \end{cases}$

Actividad N.° 12: Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?
b) Una granja tiene pavos y cerdos: en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?
c) Antonio dice a Pedro: "El dinero que tengo es el doble del que tenés vos", y Pedro contesta: "Si me das $6000 de los que tenés, vamos a tener los dos la misma cantidad". ¿Cuánto dinero tenía cada uno?
d) En una empresa trabajan 60 personas. Usan anteojos el 16 % de los hombres y el 20 % de las mujeres. Si en total 11 personas usan anteojos, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres trabajan en la empresa?
e) La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?
f) Por la compra de dos electrodomésticos se pagaron $350 000. Si en el primero se hubiera hecho un descuento del 10 % y en el segundo, uno del 8 %, se habrían pagado $317 000. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
g) Encontrar un número de dos cifras sabiendo que sus cifras suman 12 y que, si se invierte el orden de sus cifras, el número aumenta en 18.

Autoevaluación

Escanear el siguiente código o usar el enlace para realizar la autoevaluación de la unidad 2.



Autoevaluación Unidad 2

UNIDAD Nº3: FUNCIONES

Conceptos fundamentales

En matemática, una relación vincula dos números, dos variables o dos objetos. Se escribe a menudo como un conjunto de pares ordenados o mediante una regla que describe cómo se relacionan los objetos; esa regla puede ser una ecuación, una desigualdad o un sistema de ecuaciones o desigualdades. Una **función** es una clase especial de relación: una relación es función cuando a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

Dominio e imagen

En cualquier relación, el conjunto de todos los valores posibles de la primera componente X se llama ***dominio*** y el conjunto de todos los valores de la segunda componente Y se llama imagen (también rango o recorrido).

Por ejemplo:

El conjunto de pares ordenados

$$\{(2,5), (3,8), (4,12), (6,-12)\}$$

expresa una relación entre el conjunto de las primeras componentes, o dominio, {2, 3, 4, 6}, y el conjunto de las segundas componentes, o imagen, {5, 8, 12, −12}.

El dominio y la imagen son ideas importantes que nos ayudarán a entender mejor una relación, en especial cuando comencemos a graficar.

Funciones

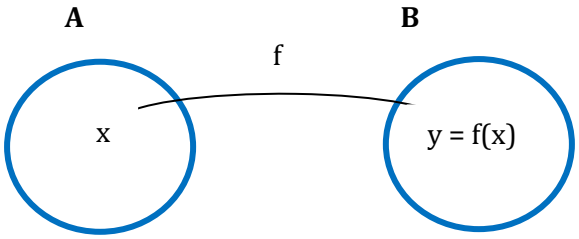
Sean A y B dos conjuntos. Una función definida de A en B es una relación que hace corresponder a ***cada*** elemento de A un único elemento de B.

$$f: A \to B \ / \ y = f(x)$$

El conjunto A se llama dominio o conjunto de partida y se expresa como Dom $f = A$.

El conjunto B es el codominio o conjunto de llegada de la función f.

El elemento y que está asociado a x por medio de f se escribe como $y = f(x)$.



El conjunto imagen (Im f) es el subconjunto del codominio formado por todos los valores $y = f(x)$, con $x \in A$.

Unidad 3 - Definición de Función. Dominio y Recorrido.

Determinación de dominio y rango

Cualquier función se puede describir por medio de un conjunto de pares ordenados, una lista, una tabla, una ecuación o una gráfica; cualquiera de estas representaciones puede utilizarse para determinar el dominio y rango de una función.

Determinar el rango de una función no siempre es tan fácil como determinar el dominio de una función.

A continuación veremos varios ejemplos de cómo determinar el dominio y rango de una función:

Ejemplo 1: Determinar el dominio y rango de una función dada por una tabla de valores

x	2	3	4	6
y	5	8	12	−12

En este caso, de acuerdo con la tabla, el dominio de la función está dado por los valores

$D = \{2, 3, 4, 6\}$, y la imagen, por los valores Im $f = \{-12, 5, 8, 12\}$. Los valores se ordenan en forma creciente.

Ejemplo 2: Determinar el dominio y la imagen de la función definida por el conjunto de pares ordenados: $\{(-1, -2), (0, 4), (3, 8), (5, 12)\}$.

En este caso el dominio de la función son las primeras componentes de los distintos pares: $D = \{-1, 0, 3, 5\}$ y la imagen es el conjunto de las segundas componentes: Im $f = \{-2, 4, 8, 12\}$.

A continuación veremos cómo se determina el dominio y la imagen de una función definida mediante una ecuación.

Ejemplo 3: Dar el dominio y la imagen de la función definida por la ecuación $y = 3x - 1$.

En este caso podemos darle cualquier valor a x y obtenemos un valor de y. Por lo tanto, decimos que el dominio de esta función son todos los números reales y su imagen también.

Dominio: todos los números reales $D = \mathbb{R}$

Imagen: todos los números reales, Im $f = \mathbb{R}$

Ejemplo 4: A continuación analizaremos cuáles son el dominio y la imagen de la función $y = x^2 - 2$

Podemos darle a x cualquier valor y siempre obtenemos un valor de y. Por lo tanto, el dominio de esta función está formado por todos los números reales.

Al elevar al cuadrado cualquier número real, positivo o negativo, se obtiene un número positivo, y el cuadrado de 0 es 0. Por lo tanto, $x^2 \geq 0$ para todo número real y, al restarle 2, resulta $x^2 - 2 \geq -2$. De este modo concluimos que la imagen de esta función está formada por todos los números reales mayores o iguales que −2.

Dominio: son todos los números reales. $D = \mathbb{R}$

Imagen: todos los números reales mayores o iguales que −2. Im $f = \{y \,/\, y \geq -2\}$

Ejemplo 5: Veremos otro ejemplo de cómo determinar el dominio y la imagen de la función $y = \sqrt{x}$.

Debido a que solo es posible extraer la raíz cuadrada de números reales no negativos, el dominio es $\{x \,/\, x \geq 0\}$.

La imagen está formada por todos los números reales positivos y el cero.

Dominio: son todos los valores de $x \geq 0$. $D = \{x \,/\, x \geq 0\}$.

Imagen: todos los valores de $y \geq 0$. Im $f = \{y \,/\, y \geq 0\}$.

Ejemplo 6: Veremos cómo determinar el dominio y la imagen de la siguiente función:

$y = \sqrt{x^2 - 16}$.

Para encontrar el dominio de la siguiente función tenemos que encontrar todos los números reales tales que $x^2 - 16 \geq 0$. Estos números son:$x^2 \geq 16 \Longrightarrow |x| \geq \sqrt{16} \Longrightarrow x \geq 4 \ \vee \ x \leq -4$

Dominio: $D = \{x \,/\, x \geq 4 \ \vee \ x \leq -4\}$

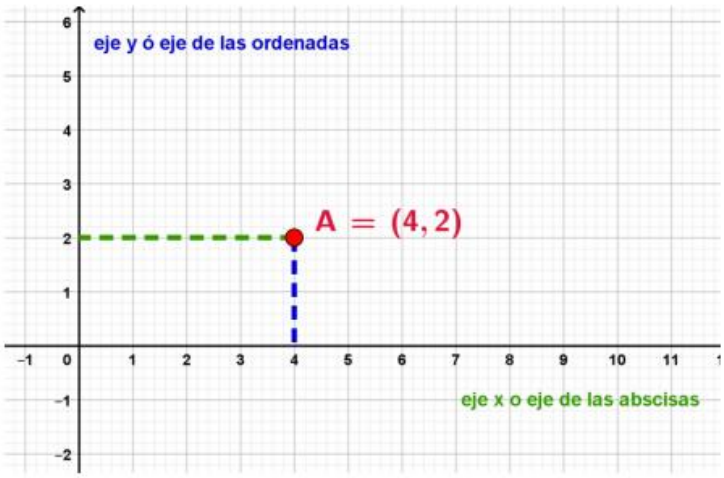
Imagen: todos los valores de $y \geq 0$. Im $f = \{y \,/\, y \geq 0\}$.

A menos que existan otras restricciones, el dominio de una función definida por una ecuación incluye a todos los números reales, excepto:

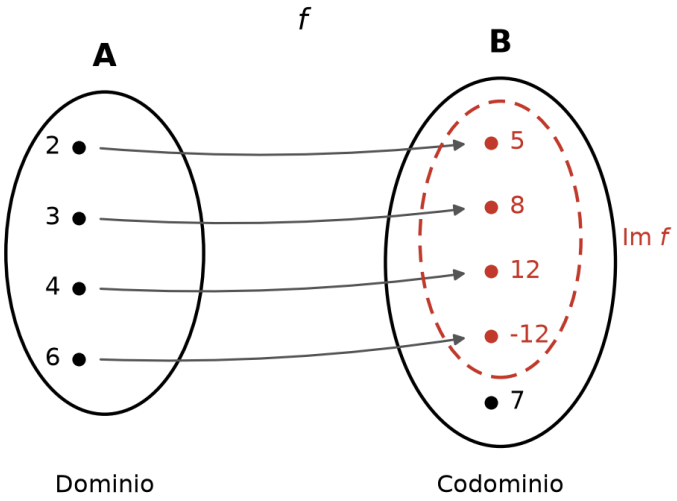
- Cualquier número para el cual el denominador sea igual a cero.
- Cualquier número para el que la expresión definida por la ecuación no sea un número real.

Representación de funciones

Las funciones se representan gráficamente en los ejes cartesianos donde cada punto de la función está dado por un par ordenado (x, y). Dado que todo valor y depende de la regla de formación de la función y del valor que se le asigne a x, llamaremos a x, variable independiente y a y, variable dependiente.



Las funciones se pueden representar de distintas formas, mediante Diagramas de Venn, por medio de una tabla de valores o realizando el gráfico correspondiente en los ejes cartesianos ortogonales. En el Diagrama de Venn, dado a continuación, se observan los elementos que pertenecen al dominio, los que pertenecen al codominio y los que conforman la imagen.



<u>Actividad N.° 1:</u> Determinar Dominio y recorrido de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt{x+5}$

b) $f(x) = x^2 - 2$

c) $f(x) = -x^2 + 3$

d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

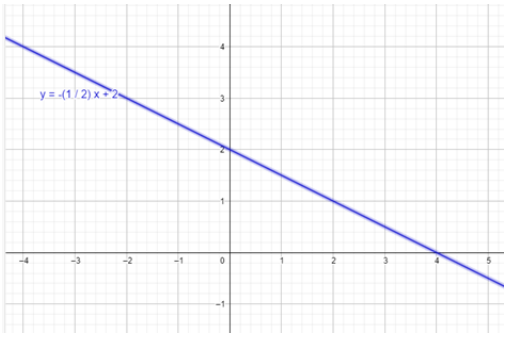
f) $f(x) = -3x + 2$

Gráfica de las funciones

Existen distintos tipos de funciones y cada una tiene características particulares que se deben tener en cuenta a la hora de hacer una gráfica y un análisis detallado. Por eso es importante encontrar elementos significativos que sirvan para construir la gráfica. Así, las raíces y la ordenada al origen, entre otros, son elementos que caracterizan a las funciones.

Las raíces o ceros de una función son los x del dominio de la función que verifican la ecuación $f(x) = 0$, gráficamente son las intersecciones de la función con el eje de abscisas (eje x). Es importante notar que una función podría no tener raíces reales, tener una sola o tener más de una, esto va a depender de la cantidad de soluciones, si es que tiene, de la ecuación $f(x) = 0$.

La ordenada al origen es el valor y de la ordenada tal que $y = f(0)$, gráficamente es la intersección de la función con el eje de ordenadas (eje y). En el caso de que $x = 0$ no pertenezca al dominio de la función, la misma no tiene ordenada al origen.



Función lineal $y = -\frac{1}{2}x + 2$

$x = 4$ es raíz;

$y = 2$ es ordenada al origen

La gráfica corta al eje x en el punto $(4, 0)$

La gráfica corta al eje y en el punto $(0, 2)$

Unidad 3 - Función Lineal

FUNCIÓN LINEAL

Llamamos ***función lineal*** a toda función del tipo $f(x) = ax + b$, donde ***a*** y ***b*** son números reales. Su dominio es $\mathbb{R}$ porque es el conjunto más amplio de números reales para el cual la fórmula tiene sentido.

El gráfico de una función lineal es una recta no vertical.

Se llama ***pendiente*** de una recta al aumento o a la disminución de la variable ***y*** por cada aumento unitario de la variable ***x***.

$f(x) = ax + b$ ⟶ Ordenada al origen

↓

Pendiente

Supongamos que $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes de la recta correspondiente al gráfico de la función lineal, entonces podemos calcular la pendiente como:

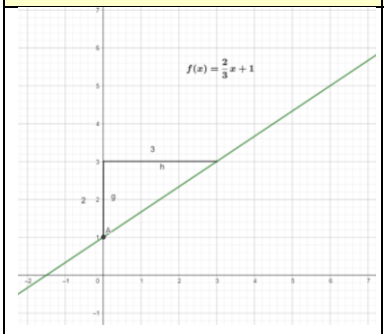
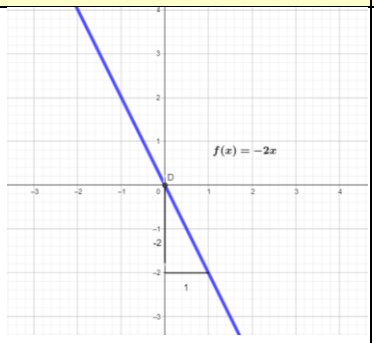
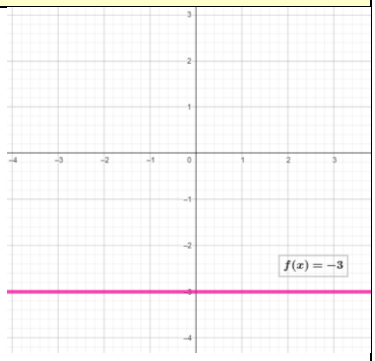
$$a = \frac{y_2 - y_1 \rightarrow \text{Mide el cambio en el eje } y}{x_2 - x_1 \rightarrow \text{Mide el cambio en el eje x}}$$

Una función lineal está dada por la expresión $f(x) = ax + b$, el gráfico de la función lineal es una recta. Donde:

a se llama pendiente de la recta (relaciona la inclinación de la recta respecto al eje X)

b se llama ordenada al origen (indica el corte de la recta en el eje Y)

La pendiente y la ordenada al origen determinan la posición de la recta en el plano.

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ $f(x) = y = ax + b$	Si $a \neq 0$ y $b = 0$ $f(x) = y = ax$	Si $a = 0$ y $b \neq 0$ $f(x) = y = b$
		
$f(x) = y = \frac{2}{3}x + 1$	$f(x) = y = -2x$	$f(x) = y = -3$

Para graficar una función lineal se puede realizar una tabla de valores, asignando valores a la variable independiente y evaluando en la función, para obtener sus respectivas imágenes. Es necesario un mínimo de dos puntos para determinar una función lineal.

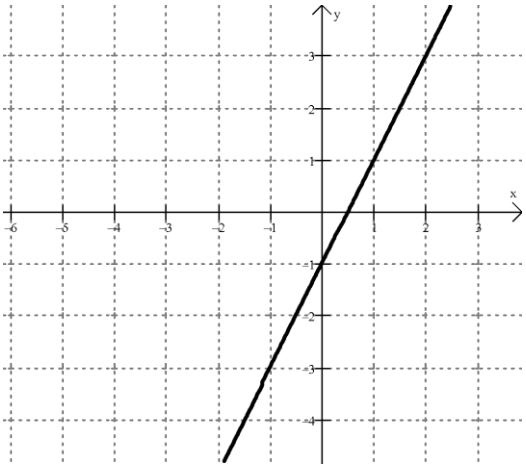
Dada una función lineal analizamos su gráfica según la pendiente:

Si la pendiente es positiva ($a > 0$),

al tomar $x_2 > x_1$ resulta $y_2 - y_1 > 0$, es decir:

$$x_2 > x_1 \implies y_2 > y_1$$

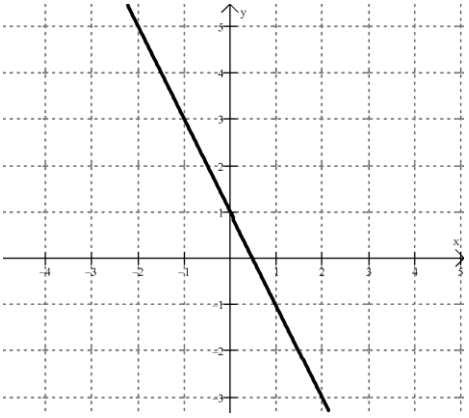
Función ***Creciente***



Si la pendiente es negativa ($a < 0$), al tomar $x_2 > x_1$ resulta $y_2 - y_1 < 0$, es decir:

$$x_2 > x_1 \implies y_2 < y_1$$

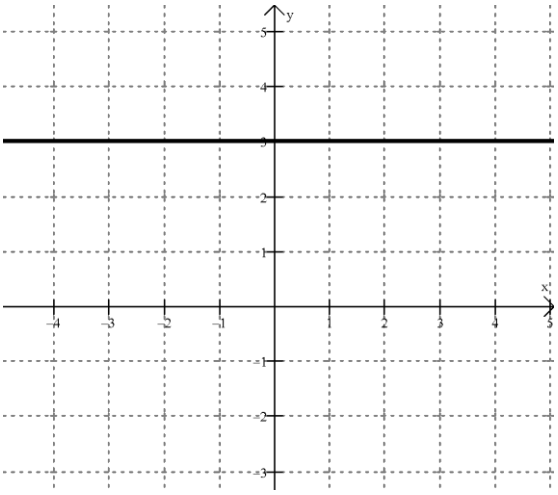
La función es ***decreciente***



Si **la pendiente es cero**, el numerador es cero. Entonces:

$$a = 0 \implies y_2 - y_1 = 0$$
$$\implies y_2 = y_1$$

Esto significa que todos los valores de las abscisas tienen la misma imagen. En este caso la función es ***constante.***



Toda recta que no sea vertical corta el eje y en el punto en el cual $x = 0$. En una función, a la imagen del cero la llamamos ***ordenada al origen***. Para hallar la ordenada al origen de la función lineal $f(x) = ax + b$, reemplazamos a la x por 0.

$$f(0) = a \cdot 0 + b \implies f(0) = b$$

Formas de ecuación de la recta

Forma general de la recta

Está dada por la forma $ax + by + c = 0$ con a, b y c números reales

Función explícita

Cuando una función se expresa de la forma $y = f(x)$ se denomina ***función explícita.*** Por ejemplo, la ecuación $y = f(x) = x - 2$ define a y explícitamente como una función de x.

Función implícita

Si la relación entre x e y no es de esta forma, decimos que x e y están relacionadas implícitamente, o que se trata de una ***función implícita.***

Por ejemplo, si escribimos la función anterior como $y - x + 2 = 0$, $y - x = -2$ o $x - y = 2$, entonces la nueva ecuación define a $\boldsymbol{y}$ implícitamente como una función de $\boldsymbol{x}$. Al despejar $\boldsymbol{y}$ obtenemos la función explícita que teníamos al principio.

Ecuación Segmentaria de la recta

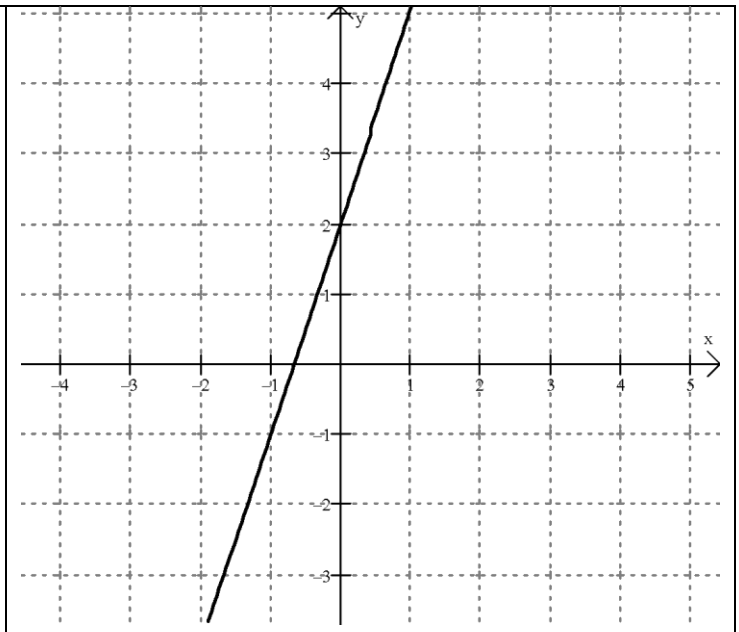
Toda ecuación de la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ representa una recta en forma segmentaria.

Los denominadores a y b son la abscisa y la ordenada de los puntos de corte con los ejes x e y, respectivamente.

La recta $y = 3x + 2$ está dada en forma explícita; para pasarla a la forma segmentaria, se procede de la siguiente manera:

$$y = 3x + 2$$
$$\Rightarrow \quad 3x - y = -2$$
$$\Rightarrow \quad \frac{3x}{-2} - \frac{y}{-2} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x}{-\frac{2}{3}} + \frac{y}{2} = 1$$

De este modo obtuvimos la ecuación segmentaria de la recta. Para graficar se marcan sobre los ejes las intersecciones y luego se traza la recta.



<u>Actividad N.° 2:</u> Construir la tabla de valores para las siguientes funciones. Graficar. Identificar pendiente y ordenada al origen.

a) $y = 3x + 2$
b) $y = x + 1$
c) $y = 2x$
d) $y = -\frac{1}{2}x$
e) $y = -x + \frac{1}{2}$
f) $y = \frac{2}{3}x - 1$
g) $y = 3$

<u>Actividad N.° 3:</u> Completar la siguiente tabla

Función expresada mediante un ENUNCIADO	Función expresada mediante EXPRESIÓN ALGEBRAICA
La función que a cada número le asocia su doble	y=2x
La función que a cada número le asocia su triple más 5	
	y=2x+1
La función que a cada número le asocia su mitad	
La función que a cada número le asocia su opuesto	
	y=-x+2
La función que expresa la distancia recorrida cada hora por un automóvil que circula a 60 km/h	
	$y=x^2$
La función que relaciona el radio de una circunferencia y su perímetro	
La función que relaciona el radio de una circunferencia y su área	

☞ *Ejercicios libro ed. Santillana:* ***pág. 213: 4, 5 y 6***

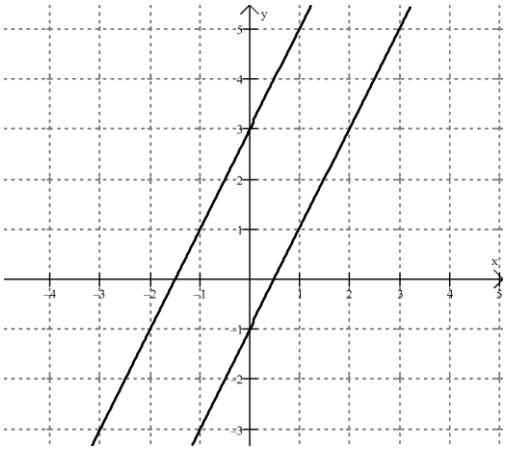
Rectas paralelas y Rectas perpendiculares

La pendiente de una recta indica su inclinación con respecto a los ejes cartesianos

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales

$f(x) = 2x - 3$

$g(x) = 2x - 1$

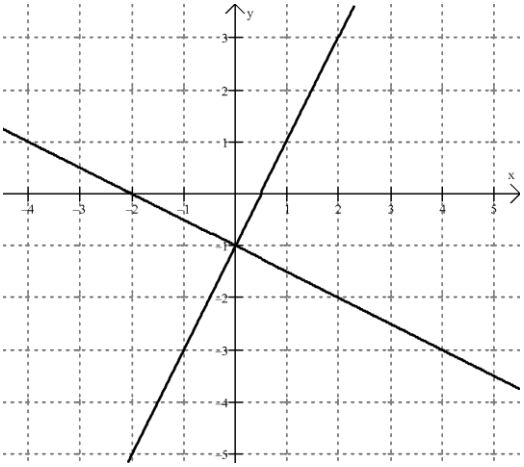


Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a −1, o, lo que es lo mismo, si sus pendientes son inversas y opuestas

$$S: y = a_1x + b_1 \ \wedge \ N: y = a_2x + b_2 \ \wedge \ S \perp N \iff a_1 = -\frac{1}{a_2}$$

$$f(x) = 2x - 1$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$$



Rectas paralelas y perpendiculares

Ecuación de la recta, dadas la pendiente y un punto de la misma

Si se conocen la pendiente m y un punto $P(x_1, y_1)$ de la recta, su ecuación $y = mx + b$ se obtiene así:

Se reemplaza el valor de la pendiente m en $y = mx + b$.

Como la recta pasa por P, sus coordenadas verifican la ecuación: $y_1 = m\,x_1 + b$. La única incógnita es b, que se despeja: $b = y_1 - m\,x_1$.

Con m y b conocidos, queda escrita la ecuación de la recta.

Otra forma de llegar al mismo resultado es usar directamente la fórmula de la recta que pasa por un punto con pendiente conocida:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo: Obtener la ecuación explícita de la recta de pendiente −3 que pasa por el punto (1, −2).

Se parte de $y = mx + b$.

Con $m = -3$ queda $y = -3x + b$.

Como la recta pasa por $P(1, -2)$, se reemplazan sus coordenadas:

$$-2 = -3 \cdot 1 + b \quad \Longrightarrow \quad b = -2 + 3 \quad \Longrightarrow \quad b = 1$$

La ecuación de la recta es $y = -3x + 1$.



Unidad 3 - Ecuación de la recta dada la pendiente y un punto.

Ecuación de una recta, dados dos puntos

Si se conocen dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ de la recta, se procede así:

Se parte de $y = mx + b$: hay que hallar la pendiente m y la ordenada al origen b.

La pendiente se obtiene con $\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

Con la pendiente conocida, se reemplazan en $y = mx + b$ las coordenadas de uno de los dos puntos, por ejemplo P:

$$y_1 = m\, x_1 + b \quad \Longrightarrow \quad b = y_1 - m\, x_1$$

Con m y b conocidos, queda escrita la ecuación de la recta.

Otra forma de hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es usar la fórmula:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplo (utilizando la fórmula): Obtener la ecuación explícita de una recta que pasa por los puntos $P(3, 2)$ y $Q(4, -3)$

$$y - 2 = \frac{-3-2}{4-3}(x - 3) \Longrightarrow y - 2 = -5(x - 3) \Longrightarrow y - 2 = -5x + 15 \Longrightarrow y = -5x + 15 + 2$$

$$\Longrightarrow y = -5x + 17$$



Unidad 3 - Ecuación de la recta dados dos puntos

<u>Actividad N.° 4:</u> Dadas las siguientes funciones lineales: $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = -2x + 5$ y $h(x) = 5x$

a. Graficar

b. Calcular $f(0), f(2), f(-1)$

c. Encontrar la raíz (Valor de x para $f(x) = 0$)

d. Encontrar el valor de x para

$$f(x) = 1$$

$$f(x) = 2$$

$$f(x) = -3$$

Actividad N.° 5: Hallar la ecuación de la recta:

a. Que pasa por el punto $P(2, 9)$ y tiene pendiente -3.

b. Que pasa por el punto $P(1, 5)$ y tiene pendiente 0

c. Que pasa por el punto $P(3, -4)$ y tiene pendiente -1

Actividad N.° 6:

a) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $y = ax + 5$ pase por el punto $(1, 4)$.
b) Hallar $b \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $y = -2x + b$ pase por el punto $(-3, 1)$
c) Hallar el valor de k, tal que la recta $3x - 5ky + 16 = 0$ pase por el punto $P(-2, 3)$

Actividad N.° 7:

a) Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(1, -1)$ y $Q(4, 8)$
b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-2, 4)$ y $Q(1, 1)$
c) Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-4, -1)$ y $Q(2, -4)$

Actividad N.° 8: Rectas paralelas y perpendiculares

I. Dada la recta R de ecuación $y = \frac{2}{3}x + 2$, obtener la ecuación explícita de la recta $T \parallel R$ que cumpla con la condición indicada en cada caso.

a. T tiene ordenada al origen -2

b. T pasa por el punto $(-1, 2)$

c. T pasa por el origen de coordenadas

d. T corta al eje x en $x = 2$

II. Dada la recta R de ecuación $y = 4x + 1$ obtener la ecuación explícita de la recta $T \perp R$ que satisfaga la condición indicada en cada caso

a. T pasa por el punto $(-1, 3)$

b. T pasa por el origen de coordenadas

c. T tiene ordenada al origen -2

d. T corta al eje x en $x = -1$

e. T corta al eje y en $y = 2$

III. Encontrar el valor de k, para que la recta $3x - ky - 7 = 0$ sea perpendicular a la recta $7x + 4y - 11 = 0$.

IV. Encontrar el valor de k para que la recta $6x + 2ky = 3$ sea paralela a la recta $3kx + 4y = 10$.

Actividad N.° 9: Algunas situaciones

a) Un kg de papas cuesta 85 pesos. Obtener y representar la función que define el costo de las papas (y) en función de los kg comprados (x). ¿Cuál es su Dom(f)? ¿Cuánto costarán 3,5 kg? ¿Qué cantidad podremos comprar si solo disponemos de un billete de 500?

b) Una canilla vierte agua a un depósito dejando caer 25 litros por minuto. Formar una tabla de valores apropiada para representar el volumen de agua en función del tiempo. ¿Cuánto tardará en llenarse un depósito de 50 m^3?

c) Los paquetes de hojas que compra un determinado instituto constan de 500 hojas y cuestan 300 pesos.

i) Formar una tabla que indique el precio de 1, 2, …, 10 hojas.

ii) Dibujar la gráfica correspondiente. ¿Qué tipo de función se obtiene? ¿Cuál es la ecuación?

d) Pasada la temporada de invierno, un local de ropa deportiva hace en todos los artículos un 20% de descuento. i) ¿Cuál será el precio rebajado de unas zapatillas de deporte que costaban 45000 pesos? ¿Y de una campera de abrigo que costaba 60000? ii) Si llamamos **x** al antiguo precio del artículo e **y** al precio rebajado, ¿qué función se obtiene?

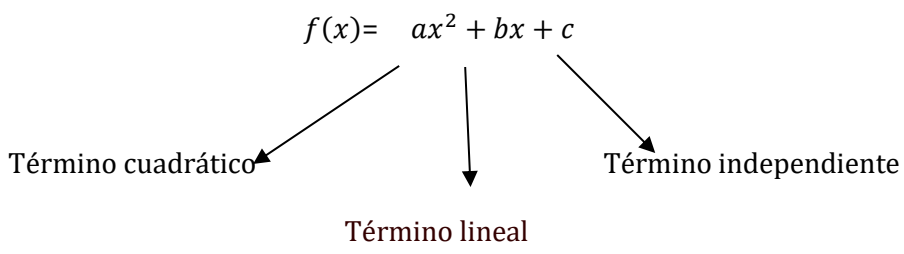
e) Se quiere abrir un pozo de forma cilíndrica de diámetro 2 m. Expresar el volumen de agua que cabe en él en función de la profundidad h. ¿Qué tipo de función se obtiene?

f) Representar el siguiente enunciado en forma algebraica: i) Sean F la temperatura en grados Fahrenheit y C la temperatura en grados Celsius. La temperatura Fahrenheit es igual a $\frac{9}{5}$ de la temperatura Celsius, más 32. ii) ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen 35°C?

Función cuadrática

A la función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo a, b y c números reales y $a \neq 0$, se le denomina función cuadrática:

Los términos de la función reciben los siguientes nombres:



La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.

A continuación graficamos funciones cuadráticas del tipo:

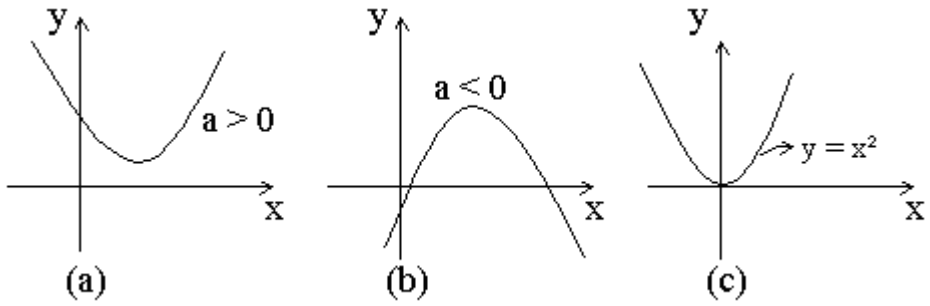
a) $f(x) = ax^2$

Analizaremos qué efecto produce el coeficiente **a**

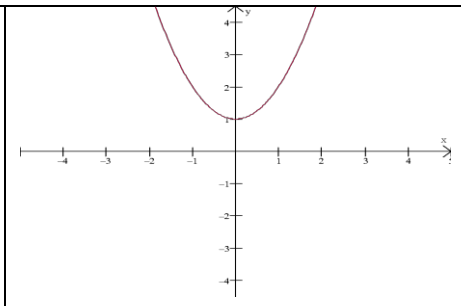
Si $a > 0 \rightarrow$ la parábola abre hacia arriba **(gráfica a)**

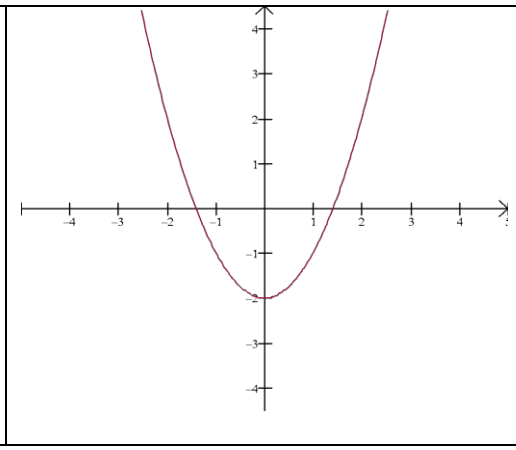
Si $a < 0 \rightarrow$ la parábola abre hacia abajo **(gráfica b)**

Caso $a = 1$**:** $y = x^2$ **(gráfica c)**



b) Función de la forma $f(x) = x^2 + c$

Si $c > 0 \rightarrow$ la gráfica se desplaza hacia **arriba**	

Si $c < 0 \rightarrow$ la gráfica se desplaza hacia **abajo**	

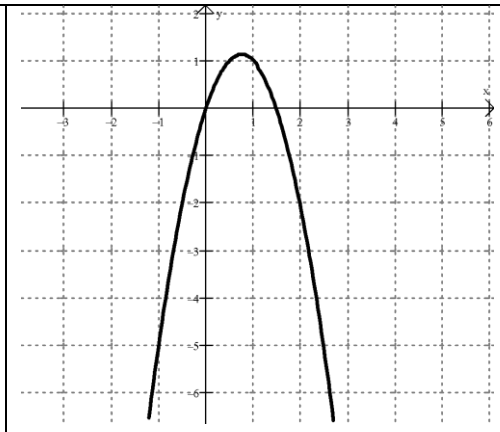
Se puede observar que el coeficiente c es la ordenada del vértice y, por lo tanto, el punto de corte con el eje de ordenadas.

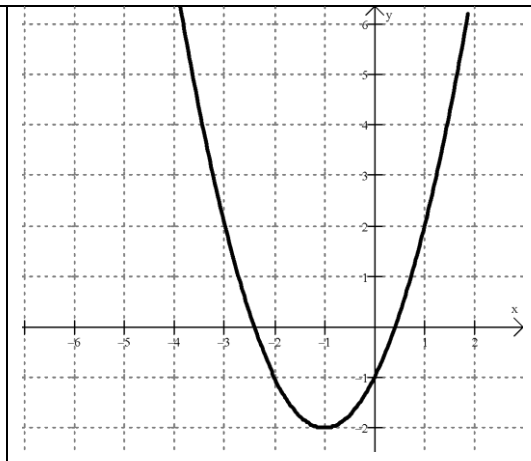
c) $f(x) = ax^2 + bx$

Se puede saber si la gráfica estará desplazada a la derecha o a la izquierda de acuerdo al signo de los coeficientes a y b.

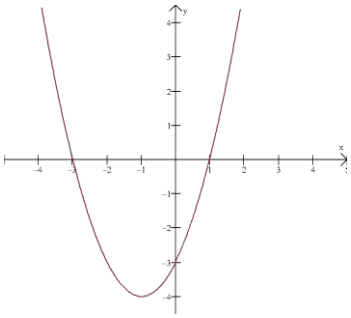
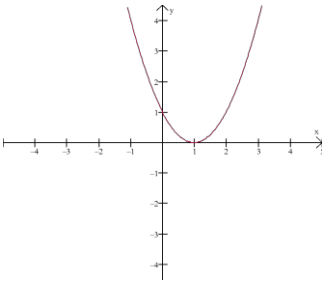
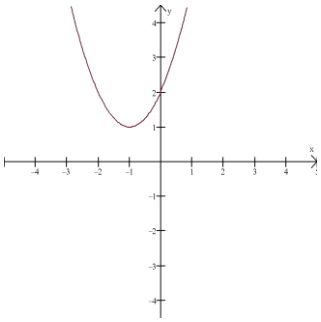
Si a y b tienen el mismo signo, la gráfica se desplaza hacia **la izquierda**, en cambio, si tienen distinto signo, se desplaza hacia la derecha.

Por ejemplo

$f(x) = -2x^2 + 3x$	

$f(x) = x^2 + 2x - 1$	

Cortes con el eje x según el valor del discriminante

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
 La gráfica tiene dos puntos de intersección con el eje x	 La gráfica tiene un punto de intersección con el eje x.	 La gráfica no tiene puntos de intersección con el eje x

Abrir el siguiente enlace y analizar la gráfica variando los valores de a, b y c.

Unidad 3 - Gráfica

Representación gráfica de la Parábola

Para graficar una función cuadrática se necesitan por lo menos tres puntos: el vértice, la ordenada al origen y, si existen, las raíces.

A continuación veremos cómo obtenemos las raíces de una ecuación de segundo grado:

- Para calcular las raíces empleamos la siguiente fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Los valores que obtenemos son los puntos de intersección de la gráfica y el eje de las abscisas.

- Calcularemos el vértice de la parábola. Recordemos que el vértice es un punto; por lo tanto, hay que encontrar su abscisa y su ordenada.

$P(x_v, y_v)$

$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = -\frac{b^2}{4a} + c$

- Eje de simetría es la recta que tiene por ecuación $x = x_v$
- Ordenada al origen: es el punto de intersección de la gráfica con el eje y, es decir, $f(0) = c$

Unidad 3 - Función Cuadrática

A continuación veremos un ejemplo $f(x) = x^2 + 2x - 3$

La ordenada al origen es -3; por lo tanto, sabemos que el punto $(0, -3)$ pertenece a la función.

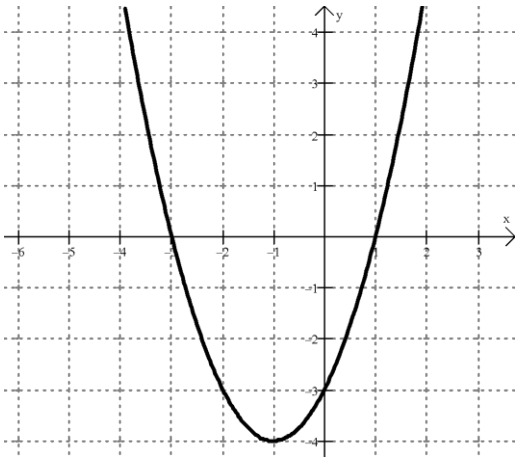
Calcularemos las raíces:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+4}{2} \Longrightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{-2-4}{2} \Longrightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

Hallemos el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} v_x = -\frac{2}{2} = -1 \\ v_y = -\frac{4}{4} - 3 = -4 \end{array}\right\} \text{vértice: } (-1, -4)$$

Con estos puntos podemos trazar la parábola:



Unidad 3 - Función Cuadrática Ejemplo Práctico

<u>Actividad N.° 10:</u> Dadas las siguientes funciones, hallar:

i) Vértice.

ii) Posibles puntos de corte con los ejes.

iii) Representación gráfica.

a) $y = x^2 - 6x + 8$

b) $y = x^2 - 2x - 3$

c) $y = -x^2 - 4x - 3$

d) $y = x^2 - 6x$

e) $y = x^2 - 4$

f) $y = -2(x-1)^2 + 8$

<u>Actividad N.° 11:</u> Resolver las siguientes situaciones problemáticas

a) Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto $(1, 9)$. Calcular el valor de a. ¿Cuál es su vértice?

b) Calcular el valor de b, para que la parábola $y = x^2 + bx + 3$ pase por el punto $P(2, -1)$. ¿Cuál es su vértice?

c) La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto vale c? Si además sabemos que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(4, 6)$, calcular el valor de a y b. Graficar.

d) Calcular m para que la parábola $y = x^2 + mx + 10$ tenga como vértice el punto $(3, 1)$. ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

e) Se sabe que la función $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $(1, 1)$, $(0, 0)$ y $(-1, 1)$. Calcular a, b y c.

f) Se sabe que la función $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $(1, 4)$, $(0, -1)$ y $(2, 15)$. Calcular a, b y c.

g) Entre todos los pares de números cuya suma es 100, determinar el par cuyo producto es lo más grande posible.

h) Un granjero desea proteger un campo rectangular con una cerca y dividirlo en dos campos rectangulares más pequeños mediante una cerca paralela a uno de los costados del campo. Tiene disponibles 3000 m de cerca. Determinar las dimensiones del campo de tal manera que el área total protegida sea máxima.

Autoevaluación

Escanear el siguiente código o usar el enlace para realizar la autoevaluación de la unidad 3.

Autoevaluación Unidad 3

UNIDAD Nº4: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se llama expresión algebraica a todo conjunto de números representados por letras, o por letras y números, relacionados entre sí por las siguientes operaciones: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Las expresiones algebraicas las podemos clasificar en:

Expresiones algebraicas enteras: son aquellas en las que ninguna letra figura como divisor o bajo el signo radical.

Ejemplo: $3x^4y^5 + 7z^3 - 2x^2$

Expresiones algebraicas fraccionarias: son aquellas en las que al menos una letra figura en el denominador:

Ejemplo: $\frac{2}{x-4} + \frac{3}{x} - \frac{5x^2}{2-x}$

Expresiones algebraicas irracionales: son aquellas en las que al menos una letra figura bajo el signo radical o como potencia de exponente fraccionario:

Ejemplo: $4\sqrt{x} - 3x^{\frac{5}{2}} - \sqrt[3]{x^2}$

Expresiones algebraicas enteras

Una expresión algebraica es entera cuando, con respecto a sus letras, solo figuran las operaciones de suma, resta, multiplicación y potenciación con exponentes positivos.

MONOMIOS

Un monomio es toda expresión algebraica entera cuyas letras están vinculadas por las operaciones de multiplicación y potenciación con exponentes enteros positivos.

Ejemplos: $\frac{4}{3}x^4y^5$

Todo monomio tiene dos partes: coeficiente y parte literal

- ***Parte literal*:** la o las letras (variables con sus exponentes). En el ejemplo anterior la parte literal es x^4y^5. En general, trabajaremos con polinomios de una variable.
- ***Coeficiente:*** Factor numérico que acompaña a la variable, si no aparece se considera que es 1. El coeficiente del ejemplo es $\frac{4}{3}$

Monomios semejantes

Se llaman monomios semejantes los que tienen la misma parte literal.

Ejemplos: $4x^3y^2$ y $-5x^3y^2$ son semejantes, también lo son $4x^5$ y $3x^5$

Grado de un monomio

El grado de un monomio es igual a la suma de los exponentes de la parte literal.

Ejemplo: $4x^3y^2$ el monomio es de grado 5

$\frac{5}{2}xyz^6$ el monomio es de grado 8

POLINOMIOS

Se llama polinomio a toda suma algebraica de monomios. Cada monomio es un término del polinomio.

En general al polinomio lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

Donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son los coeficientes y x es la variable.

En esta expresión consideramos que $a_n \neq 0$; entonces n es el grado del polinomio y a_n es su coeficiente principal.

Un polinomio de dos términos es un ***binomio***. Ejemplo: $x + 2$

Un polinomio de tres términos es un ***trinomio***. Ejemplo: $x^3 - 2x^2 + 4$

Un polinomio de cuatro términos es un ***cuatrinomio.*** Ejemplo: $-5x^5 - x^3 - 2x^2 + 4$

Grado de un polinomio

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Ejemplo: $4x^3 - 3x^5 + 6x - 7x^2$. El polinomio es de grado cinco

Se llama coeficiente principal al coeficiente que acompaña al monomio de mayor grado.

El ***coeficiente principal*** del ejemplo anterior es: −3

Polinomios completos e incompletos

Un polinomio es ***completo*** cuando tiene todas las potencias de la variable, desde la de mayor grado hasta el término independiente. Un polinomio es incompleto cuando faltan algunas de las potencias.

Ejemplo: Polinomio completo $P(x) = 2 + 5x - \frac{3}{2}x^2 + 7x^3 + 7x^4$

Polinomio de: cuarto grado

El número de términos es: 5

El término independiente: 2

El coeficiente del término cuadrático: $-\frac{3}{2}$

El coeficiente principal es: 7

El término lineal es: $5x$

Ejemplo: Polinomio incompleto $Q(x) = 5x^3 + \frac{8}{3}x^5$

Polinomio de: grado 5

Si lo completamos: $Q(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 5x^3 + 0x^4 + \frac{8}{3}x^5$

Ordenado en forma creciente

El número de términos es: 2

El coeficiente del término cúbico es: 5

El coeficiente principal es: $\frac{8}{3}$

OPERACIONES CON MONOMIOS

Suma de monomios semejantes

La suma de varios monomios semejantes es igual a otro monomio semejante, cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de los monomios dados y la parte literal es la misma.

Ejemplo: Sean los monomios: $-5x^2$, $3x^2$, $-\frac{1}{4}x^2$.

Se suman: $-5x^2 + 3x^2 - \frac{1}{4}x^2 = -\frac{9}{4}x^2$

Suma de monomios no semejantes

La suma de varios monomios no semejantes es igual al polinomio formado por la suma de dichos monomios.

Ejemplo: Sean los monomios: $4x^2$, $\frac{1}{3}x$, $-\frac{5}{3}x^3$.

Se suman: $4x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}x^3$

Resta de monomios semejantes

Se restan los coeficientes y se conserva la parte literal.

Ejemplo: Sean los monomios: $-5x^2$, $3x^2$.

Se restan: $-5x^2 - 3x^2 = -8x^2$

Resta de monomios no semejantes

Para restar dos monomios se suma al monomio minuendo el monomio sustraendo cambiado de signo.

Ejemplo: Sean los monomios: $-5x^2$, $-8x^4$.

Se restan: $-5x^2 - (-8x^4) = -5x^2 + 8x^4$

Se obtiene como resultado un polinomio.

Multiplicación de monomios

El producto de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes de los factores y el grado es la suma de los grados de los factores.

Ejemplo: $4x^4 \cdot (-3x^5) = -12x^9$

$$5x^3 \cdot \frac{4}{7}x = \frac{20}{7}x^4$$

División de monomios

El cociente de dos monomios es igual a otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes y cuya parte literal es el cociente de las potencias de igual base del dividendo y divisor, siempre que la diferencia de los exponentes sea positiva o nula.

Ejemplo: $48x^4 : (-3x^3) = -16x$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma de polinomios

Para sumar varios polinomios se forma el polinomio suma con los términos de dichos polinomios, sumando los monomios de igual parte literal, y se obtiene la suma buscada. La manera práctica de sumar o restar polinomios es ubicarlos uno debajo del otro, de manera que los términos semejantes queden en columna:

Ejemplo: Sumar los siguientes polinomios

$P(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3$, $Q(x) = -9x^3 + x^2 + x - 1$, $R(x) = -10x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

$P(x)$	x^4	$-5x^3$	$+2x^2$		-3
$Q(x)$		$-9x^3$	$+x^2$	$+x$	-1
$R(x)$		$-10x^3$	$+4x^2$	$-3x$	$+1$
$P(x) + Q(x) + R(x)$	x^4	$-24x^3$	$+7x^2$	$-2x$	-3

Resta de polinomios

Para restar dos polinomios, se suma al polinomio minuendo el polinomio sustraendo cambiado de signo, término a término.

Ejemplo: Restar los siguientes polinomios

$P(x) = 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4$ $\quad$ $Q(x) = -8x^3 - 2x^2 + x - 7$

$P(x)$	$5x^4$	$-4x^3$	$-3x^2$		-4
$-Q(x)$		$+8x^3$	$+2x^2$	$-x$	$+7$
$P(x) - Q(x)$	$5x^4$	$+4x^3$	$-x^2$	$-x$	$+3$

Unidad 4 - Suma y Resta de Polinomios

Multiplicación de Polinomios

Multiplicación de un polinomio por un monomio

El producto de un polinomio por un monomio, es igual a la suma algebraica de los productos de cada término del polinomio por dicho monomio. Se aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

Ejemplo: $\left(3x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 6x + 4\right) \cdot 4x^2 = 12x^5 - \frac{16}{3}x^4 - 24x^3 + 16x^2$

Multiplicación de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios aplicamos la propiedad distributiva, es decir, multiplicamos cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio.

Ejemplo:

$P(x) = 2x^2 - 4x + 3$ y $Q(x) = 4x^2 - x$

$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 4x + 3) \cdot (4x^2 - x)$

$= 2x^2 \cdot 4x^2 + 2x^2 \cdot (-x) + (-4x) \cdot 4x^2 + (-4x) \cdot (-x) + 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot (-x)$

$= 8x^4 - 2x^3 - 16x^3 + 4x^2 + 12x^2 - 3x$

$= 8x^4 - 18x^3 + 16x^2 - 3x$

Una forma práctica para efectuar el producto de polinomios es efectuar los cálculos en forma ordenada, por ejemplo:

$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x - 7$ y $Q(x) = 2x^2 - 4x + 3$

$$P(x) \cdot Q(x)$$

$P(x)$			$3x^4$	$-2x^3$	$+0x^2$	$+3x$	-7
$Q(x)$					$2x^2$	$-4x$	$+3$
$P(x) \cdot 2x^2$	$6x^6$	$-4x^5$	$+0x^4$	$+6x^3$	$-14x^2$		
$P(x) \cdot (-4x)$		$-12x^5$	$+8x^4$	$+0x^3$	$-12x^2$	$+28x$	
$P(x) \cdot 3$			$9x^4$	$-6x^3$	$+0x^2$	$+9x$	-21
$P(x) \cdot Q(x)$	$6x^6$	$-16x^5$	$+17x^4$	$+0x^3$	$-26x^2$	$+37x$	-21

Unidad 4 - Multiplicación de Polinomios

IDENTIDADES NOTABLES

Cuadrado de un binomio: El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el duplo del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplos:

$$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2$$

$$= 4x^2 + 12x \cdot y + 9y^2$$

$$(4x-2y)^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot (-2y) + (-2y)^2$$

$$= 16x^2 - 16x \cdot y + 4y^2$$

Cubo de un Binomio: El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triplo del cuadrado del primer término por el segundo término, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplos:

$$(3x+2y)^3 = (3x)^3 + 3\cdot(3x)^2\cdot 2y + 3\cdot 3x\cdot(2y)^2 + (2y)^3$$

$$= 27x^3 + 54x^2\cdot y + 36x\cdot y^2 + 8y^3$$

$$(4y-3x)^3 = (4y)^3 + 3\cdot(4y)^2\cdot(-3x) + 3\cdot 4y\cdot(-3x)^2 + (-3x)^3$$

$$= 64y^3 - 144y^2\cdot x + 108y\cdot x^2 - 27x^3$$

Suma por diferencia de dos monomios

El producto de la suma de dos monomios por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - a\cdot b + a\cdot b - b^2$$

$$= a^2 - b^2$$

Ejemplos:

$$(4+x)\cdot(4-x) = 4^2 - x^2$$

$$(5x+7y)\cdot(5x-7y) = (5x)^2 - (7y)^2$$

$$= 25x^2 - 49y^2$$

Actividad N.° 1: Indicar cuáles de las siguientes expresiones son algebraicas enteras

(a y b son constantes):

a) $3x^2 + 4x$

b) $47x^4 - 9y^5$

c) $(2x^3)(5y)\sqrt{3}ab - \frac{7a}{b}$

d) $-3x^5 - (4a) + \left(\frac{b}{5}\right) + 9\sqrt{y}$

Actividad N.° 2: Identificar los términos semejantes:

a) $3x^2y$; $17x^2y$; $12xy^2$

b) $3x^2y$; $-9xy^2$; $5xy^2$ y $6(x^2+y)$

c) ax^2 ; a^2x ; $5x^2$; $5a^5x$.

Actividad N.° 3: Resolver las siguientes sumas algebraicas:

a) $-\frac{2}{5}x^3+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^3=$

b) $\frac{3}{7}x^4-\frac{7}{2}x^4+\frac{1}{14}x^4=$

c) $2x-\frac{9}{2}x-\frac{5}{3}x=$

d) $\left(2x^4-\frac{9}{2}x^3-\frac{5}{3}x^2\right)-\left(5x^3-\frac{7}{2}x^4-\frac{8}{3}x^2\right)=$

e) $\left(\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{10}x^5+3x^4\right)+\left(0{,}3x^6+\frac{7}{2}x^5-0{,}4x^2\right)=$

f) $\left(2x^9-\frac{3}{2}x^5-\frac{1}{6}x^6\right)-\left(-\frac{3}{5}x\ -\frac{3}{2}x^9-\frac{3}{2}x^5\right)=$

g) $\left(-\frac{2}{7}x^4-\frac{3}{2}x^5+\frac{1}{3}x^9\right)+\left(-\frac{4}{5}x^4-\frac{7}{2}x^9-\frac{5}{2}x^5\right)=$

h) $\left(-x^4-\frac{11}{2}x^3-\frac{10}{3}x^2\right)-\left(-5x^3+\frac{7}{2}x^4+\frac{8}{3}x^2\right)=$

i) $\left(4x^4-x^3-\frac{5}{3}x\right)+\left(5x^3-\frac{7}{2}x^4+\frac{8}{3}x\right)=$

j) $\left(-12x^7-\frac{1}{2}x^3-\frac{11}{3}x^2\right)-\left(-9x^3-\frac{7}{2}x^7-\frac{8}{3}x^2\right)=$

Actividad N.° 4: Efectuar las siguientes multiplicaciones:

a) $(3ax)(2ax^2)=$

b) $(2r^2+3x)(2r^2-3x)=$

c) $(3x)(4ax)(-2x^2b)=$

d) $(4p^3-7d)(4p^3+7d)=$

e) $-3n(2n-5)=$

f) $\left(-x^4-\frac{11}{2}x^3-\frac{10}{3}x^2\right)\cdot\left(-5x^3+\frac{7}{2}x^4+\frac{8}{3}x^2\right)=$

g) $\left(2x^4-\frac{9}{2}x^3-\frac{5}{3}x^2\right)\left(5x^3-\frac{7}{2}\right)=$

h) $\left(2x^9-\frac{3}{2}x^5-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}x-\frac{3}{2}x^9\right)=$

i) $\left(-x^4-\frac{11}{2}\right)\cdot\left(-5x^3+\frac{7}{2}x\right)=$

Actividad N.° 5: Desarrollar cuadrado y cubo de los siguientes binomios:

a) $(2x-5)^2=$

b) $\left(-5x^3+\frac{3}{5}x^2\right)^2=$

c) $\left(\frac{4}{3}x^5-\frac{6}{5}x^2\right)^2=$

d) $\left(-2x^2-\frac{3}{2}x^3\right)^2=$

e) $(-3x^2-2x^3)^3=$

f) $\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{3}x\right)^3=$

g) $\left(\frac{1}{4}x+\frac{2}{5}x^3\right)^3=$

h) $\left(-2x^2-\frac{3}{4}x^3\right)^3=$

Actividad N.° 6: Desarrollar los siguientes productos de suma por diferencia:

a) $(2x-5)\cdot(2x+5)=$

b) $\left(\frac{3}{4}x+5y\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x-5y\right)=$

c) $\left(\frac{5}{3}x-7y\right)\cdot\left(\frac{5}{3}x+7y\right)=$

d) $(9x-y)\cdot(9x+y)=$

División de un polinomio por un monomio

Para efectuar la división de un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio.

Ejemplo: $\left(3x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 6x\right) : 4x = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}$

División de polinomios

Para hallar el cociente entero de dos polinomios enteros es necesario tener presente lo siguiente:

Dividir un polinomio entero $A(x)$ por otro polinomio $B(x)$ ambos ordenados en forma decreciente, es hallar un tercer polinomio entero, $C(x)$, del mayor grado posible, que verifique la igualdad:

$$A(x) = B(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Donde $R(x)$, el resto de la división, es un polinomio en x de grado menor que el del divisor.

Regla:

1. Se ordenan los polinomios en forma decreciente, completando el dividendo si fuera necesario.
2. El primer término del cociente se halla dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor.
3. Se multiplica el primer término del cociente por cada término del divisor, debiendo restar cada producto del término semejante del dividendo. (Cada resta se transforma en suma cambiando el signo del sustraendo).
4. Los términos contrarios se suprimen. Se completa el resto con los términos necesarios del dividendo.
5. Se divide el primer término del resto por el primer término del divisor hallando así el segundo término del cociente.
6. Se repite el procedimiento indicado en 3 con respecto al nuevo dividendo.
7. Se prosigue la división como se indica en 4, 5 y 6 hasta que el grado del resto sea menor que el grado del divisor.

Ejemplo: Dividir los siguientes polinomios $P(x) = 4x^4 + 2 - 2x^3 - x$, $Q(x) = x^2 - 2x$

Al polinomio $P(x)$ lo ordenamos y completamos: $P(x) = 4x^4 - 2x^3 + 0x^2 - x + 2$

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 - 2x^3 + 0x^2 - x + 2 & x^2 - 2x \\ \hline -4x^4 + 8x^3 & 4x^2 + 6x + 12 \\ \hline 6x^3 + 0x^2 - x + 2 & \\ -6x^3 + 12x^2 & \\ \hline \end{array}$$

Cociente $C(x)$

$$12x^2 - x + 2$$

$$-12x^2 + 24x$$

$$23x + 2$$ **Resto** $R(x)$

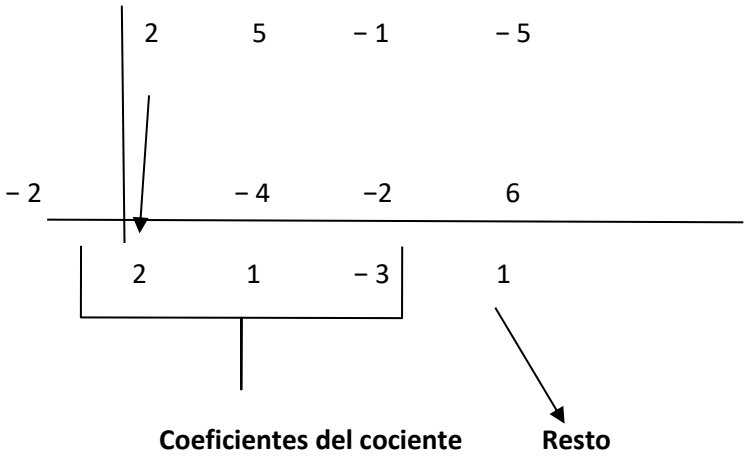
Unidad 4 - División de Polinomios

Regla de Ruffini

La **regla de Ruffini** es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio $P(x)$ por otro polinomio de la forma $(x \pm a)$

Sean los polinomios $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$

Aplicando la regla de Ruffini**.**



Cociente: $C(x) = 2x^2 + x - 3$ **Resto:** 1

Los pasos seguidos fueron:

1. Lo primero que se hace es ordenar y completar el polinomio $P(x)$, luego se colocan los coeficientes del polinomio ordenado en forma decreciente.

2. A la izquierda de la segunda fila se escribe el valor de a, el opuesto del término independiente del divisor: en este caso, −2.

3. En la tercera fila, se baja el coeficiente del término de mayor grado: 2 (este es el coeficiente del primer término del cociente). Lo multiplicamos por −2 y el resultado − 4 se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo 5. Se suman −4 y 5 y el resultado 1 se escribe abajo.

4. El 1 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por −2 y el resultado −2 se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo −1. Se suman −1 y −2 y el resultado −3 se escribe abajo.

5. El −3 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por − 2 y el resultado 6 se escribe debajo del último coeficiente del dividendo −5. Se suman −5 y 6 y el resultado 1 es el resto. Se escribe abajo.

6. El resto es 1. Los valores 2, 1 y − 3 son los coeficientes del cociente:$C(x) = 2x^2 + x - 3$, cuyo grado es una unidad menor que el polinomio dividendo.

Al dividendo de la división podríamos escribirlo así:

$$2x^3 + 5x^2 - x - 5 = (x + 2) \cdot (2x^2 + x - 3) + 1$$



Unidad 4 - Ruffini

Valor numérico de una expresión algebraica

Se llama valor numérico de una expresión algebraica, para un sistema de valores asignados a sus letras, al número que se obtiene como resultado de efectuar las operaciones indicadas en dicha expresión algebraica una vez reemplazadas sus letras por los valores correspondientes.

Ejemplos: Hallar el valor numérico de:

a) $3ax^2 - 3z$ para $a = -2;\ x = 3;\ z = -5.$

Se reemplaza en la expresión algebraica cada letra por su valor correspondiente, y luego resolviendo se tiene:

$$3 \cdot (-2) \cdot 3^2 - 3 \cdot (-5) = -54 + 15 = -39$$

b) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 7$ para $x = 2$. Reemplazando se tiene:

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 2 + 7$$

$P(2) = 16 - 16 - 2 + 7$

$P(2) = 5$

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $x - a$, con a real, es igual al valor numérico del polinomio para $x = a$, es decir, a $P(a)$.

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + r$$

$P(x)$ $\quad$ $x - a$ $\quad \Longrightarrow P(x) = (x - a) \cdot C(x) + r$

r $\quad$ $C(x)$

Si sustituimos x por a $\Longrightarrow$ $P(a) = (a - a) \cdot C(a) + r$

$\Longrightarrow P(a) = r$

Ejemplo: $P(x) = 2x^4 - 10x^2 - 7$. ¿Cuál es el resto al dividirlo por $(x + 3)$?

Reemplazamos x por -3 en $P(x)$:

$$P(-3) = 2(-3)^4 - 10(-3)^2 - 7$$

$= 2 \cdot 81 - 10 \cdot 9 - 7$

$= 162 - 90 - 7$

$= 65$

El resto es de 65.

RAÍCES DE UN POLINOMIO

Un número real a es raíz del polinomio $P(x)$ si a es solución de la ecuación $P(x) = 0$. Esto significa que, si en el polinomio se reemplaza la indeterminada x por a, se obtiene $P(a) = 0$.

Ejemplo: Para verificar si 2 es raíz del polinomio $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 28x + 48$, se reemplaza x por 2:

$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 28 \cdot 2 + 48$

$= 2 \cdot 8 - 2 \cdot 4 - 56 + 48$

$= 16 - 8 - 56 + 48$

$= 64 - 64$

$P(2) = 0$ $\quad$ sí, 2 es raíz

Actividad N.° 7: Efectuar las siguientes divisiones:

a) $-\frac{2}{9}x^7 : \frac{5}{6}x^4 =$	f) $\left(-6x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 2x^2\right) : \left(-\frac{1}{3}x^2\right) =$
b) $-\frac{5}{8}x^{10} : \left(-\frac{15}{32}\right)x^4 =$	g) $\left(2x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 3x^4 - \frac{1}{6}\right) : (3x^2 - 2x) =$
c) $(6x^3 - 12x^2 + 3x) : (-3x) =$	h) $(2x^5 - 3x^3 + 6x) : (x^2 + x - 1) =$
d) $\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - 2x^2\right) : \left(\frac{1}{2}x\right) =$	i) $(5x^3 - 2x \ \ - 3) : (2x + 1) =$
e) $\left(x^4 - 15x^3 + 9x^2 - \frac{6}{5}x\right) : \left(-\frac{3}{5}x\right) =$	j) $(x^3 + 2) : \left(2x - \frac{1}{2}\right) =$

Actividad N.° 8: Resolver aplicando regla de Ruffini:

a) $(2x^3 + 5x - 1) : (x - 2) =$

b) $(3x^3 - 2x^2 - 2) : (x + 1) =$

c) $(x^3 - 3x^2 - 2) : (x - 3) =$

d) $(-x^5 + 12x^3 - 15x^2 - 16) : (x + 4) =$

Actividad N.° 9: Calcular directamente el resto de las siguientes divisiones:

a) $(-2x + 5x^2 + 4) : (x + 3) =$

b) $(2x^3 - 4x^2 - 3) : (x - 1) =$

c) $(12x^4 - 5x^2 + 2x - 5) : (x - 2) =$

d) $\left(\frac{3}{2}x^3 + 4x^2 + 3\right) : (x + 2) =$

FACTOREO

Factorear o factorizar un polinomio entero de **n** términos es expresarlo como un **producto** de otras expresiones algebraicas enteras.

A continuación veremos los distintos casos de factoreo:

Factor común

Para factorear un polinomio que tiene factores comunes en todos sus términos se escribe el producto de todos los factores comunes, numéricos y literales, fuera de un paréntesis dentro del cual se escribe el polinomio formado por los cocientes de cada término del polinomio dado por el producto de los factores comunes extraídos. (Tener en cuenta que el número de términos dentro del paréntesis es igual al número de términos del polinomio que se factorea).

Ejemplos:

a) $4x^2 - 8x = 4x(x - 2)$

b) $-24x^4 + 12x^3 - 6x^2 = 6x^2(-4x^2 + 2x - 1)$

Factor común en grupos de igual número de términos

Para factorear un polinomio que tiene grupos de igual número de términos con factores comunes en cada grupo se factorean dichos grupos, el resultado se factorea nuevamente con respecto al factor común que aparece entre paréntesis. Si el nuevo factor fuera común solo parcialmente, se efectúa un factoreo parcial que permitirá el factoreo final.

Ejemplos:

a) $7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 = (7x^5 + 14x) + (-5x^4 - 10)$

$= 7x(x^4 + 2) - 5(x^4 + 2)$

$= (7x - 5)(x^4 + 2)$

b) $a^3 - a^2 + a - 1 = (a^3 - a^2) + (a - 1)$

$= a^2(a - 1) + (a - 1)$

$= (a^2 + 1) \cdot (a - 1)$

c) $4x^3 + 8x^2 + 8x + 16 = 4(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)$

$= 4[(x^3 + 2x^2) + (2x + 4)] = 4[x^2(x + 2) + 2(x + 2)]$

$= 4(x + 2)(x^2 + 2)$

Diferencia de cuadrados

Para factorear un binomio que es diferencia de cuadrados se forma el producto de la suma de las bases de dichos cuadrados por la diferencia de las mismas.

Ejemplos:

a) $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

b) $x^2 - 25 = (x - 5) \cdot (x + 5)$

c) $x^6 - 9 = (x^3 - 3) \cdot (x^3 + 3)$

d) $x^4 - 121 = (x^2 - 11) \cdot (x^2 + 11)$

Trinomio cuadrado perfecto

Para factorear un polinomio que es trinomio cuadrado perfecto se eleva al cuadrado el binomio formado por la suma de las bases de los cuadrados perfectos que son términos del trinomio, previa identificación del doble producto de dichas bases con el término restante del trinomio.

Observaciones: Cuando el término igual al doble producto de las bases es negativo, uno de los términos del binomio es positivo, en tanto que el otro debe ser necesariamente negativo; si es positivo, ambos términos del binomio son positivos.

Ejemplos:

a) $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a) \cdot (x + a) = (x + a)^2$

b) $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a) \cdot (x - a) = (x - a)^2$

c) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

d) $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$

Cuatrinomio cubo perfecto

Para factorear un polinomio que es cuatrinomio cubo perfecto se eleva al cubo el binomio formado por la suma de las bases de los cubos perfectos que son términos del cuatrinomio, previa identificación de los triples productos de los cuadrados de cada una de dichas bases por la otra con los otros dos términos del cuatrinomio.

Observaciones: Si el cuatrinomio tiene dos términos positivos y los otros dos negativos, uno de los términos del binomio es positivo y el otro negativo. Si los cuatro términos son negativos, los dos términos del binomio son negativos; si los cuatro son positivos, los dos términos del binomio son positivos.

Ejemplos:

a) $a^6 + 12a^4y^3 + 48a^2y^6 + 64y^9 = (a^2 + 4y^3)^3$

b) $-125a^{12} - 15a^8 - \frac{3}{5}a^4 - \frac{1}{125} = \left(-5a^4 - \frac{1}{5}\right)^3$

c) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = (x + 4)^3$

Suma o diferencia de potencias de igual grado

A continuación veremos los diferentes casos de suma y diferencia de potencias de igual grado.

SUMA DE POTENCIAS DE IGUAL GRADO

a) La ***suma*** de dos potencias de igual grado **par** no es divisible por la suma de las bases de dichas potencias ni por su diferencia. En consecuencia, no se factorean con este caso (algunos sí pueden factorearse como suma de potencias de grado impar; por ejemplo, $x^6 + 64 = (x^2)^3 + 4^3$).

b) La ***suma*** de dos potencias de igual grado impar solamente es divisible por la suma de las bases de dichas potencias

Ejemplo: Suma de potencias de igual grado par

$x^4 + 81$, no tiene raíces reales

Ejemplo: Suma de potencias de igual grado impar

$x^5 + 243 = x^5 + 3^5$. Se buscan las raíces

$x^5 + 3^5 = 0 \implies x = -3.$

Se resuelve por la regla de Ruffini $(x^5 + 3^5) : (x + 3)$

	1	0	0	0	0	243
-3		-3	9	- 27	81	-243
	1	- 3	9	- 27	81	0

Por lo tanto: $x^5 + 3^5 = (x + 3)(x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81)$

DIFERENCIA DE POTENCIAS DE IGUAL GRADO

La **diferencia** de dos potencias de Igual grado **par**, es divisible tanto por la ***suma*** de las bases de dichas potencias como por la ***diferencia*** de las mismas.

Ejemplo: Diferencia de potencias de igual grado par

$x^4 - 81 = x^4 - 3^4$

Se buscan las raíces de: $x^4 - 81 = 0 \Longrightarrow |x| = 3 \implies x_1 = 3 \vee x_2 = -3$

Se aplica la regla de Ruffini

- $(x^4 - 81) : (x - 3)$

	1	0	0	0	-81
3		3	9	27	81
	1	3	9	27	0

$x^4 - 81 = (x - 3) \cdot (x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$.

- $(x^4 - 81) : (x + 3)$

	1	0	0	0	-81
-3		-3	9	-27	81
	1	-3	9	-27	0

$x^4 - 81 = (x+3)(x^3 - 3x^2 + 9x - 27)$.

Como $x^3 + 3x^2 + 9x + 27 = (x+3)(x^2+9)$, la factorización completa es $x^4 - 81 = (x-3)(x+3)(x^2+9)$.

La ***diferencia*** de dos potencias de igual ***grado impar*** solamente es divisible por la diferencia de las bases de dichas potencias

Ejemplo: Diferencia de potencias de igual grado impar.

$x^3 - 125 = x^3 - 5^3$ se buscan las raíces

$x^3 - 5^3 = 0 \implies x = 5.$

Se resuelve por la regla de Ruffini $(x^3 - 5^3) : (x-5)$

	1	0	0	- 125
5		5	25	125
	1	5	25	0

Por lo tanto: $x^3 - 5^3 = (x-5)(x^2+5x+25)$

Factoreo de un polinomio de segundo grado

Para factorear un polinomio de segundo grado, primero se obtienen las raíces de la ecuación de segundo grado asociada, y luego:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Ejemplo:

$$6x^2 - 10x + 4 = 6(x-1) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)$$

Estrategias para factorear

Ciertos polinomios pueden factorearse aplicando sucesivamente varios de los casos de factoreo.

Generalmente se inicia el factoreo aplicando el factor común, si ello es posible, para facilitar el factoreo posterior del polinomio aplicando los casos restantes.

Tener en cuenta la cantidad de términos

- ***Dos Términos:*** Intentar factorear como una diferencia de cuadrados o como una suma o diferencia de potencias de igual grado.
- ***Tres términos:*** Identificar si es un trinomio cuadrado perfecto, si lo es factorearlo como el cuadrado de un binomio.
- **Cuatro términos:** Identificar si es un cuatrinomio cubo perfecto, si lo es, factorearlo como el cubo de un binomio.
- **Cuatro o más términos:** analizar si se pueden agrupar, es decir, si se puede aplicar factor común en grupos.
- Por último, asegurarse de que cada factor que queda sea primo.

Ejemplo: Factorear $x^7 + 2x^6y + x^5y^2 - x^3y^4 - 2x^2y^5 - xy^6$

Aplicando factor común se tiene:

$x^7 + 2x^6y + x^5y^2 - x^3y^4 - 2x^2y^5 - xy^6 = x \cdot (x^6 + 2x^5y + x^4y^2 - x^2y^4 - 2xy^5 - y^6)$

Ahora se aplica factor común en grupos

$= x \cdot [(x^6 + 2x^5y + x^4y^2) + (-x^2y^4 - 2xy^5 - y^6)]$

$= x \cdot [x^4(x^2 + 2xy + y^2) - y^4(x^2 + 2xy + y^2)]$

$= x \cdot [(x^2 + 2xy + y^2) \cdot (x^4 - y^4)]$

$= x \cdot (x + y)^2 \cdot (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$

$= x \cdot (x + y)^2 \cdot (x^2 + y^2)(x - y) \cdot (x + y)$

Unidad 4 - Factoreo

Actividad N.° 10: Aplicar factor común:

a) $15b - 25c + 10d =$

b) $2ab + 3ac - 4ad =$

c) $4m^4n^2 - 8mn^2 + 14m^5n^4 =$

d) $\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}y =$

Actividad N.° 11: Factorear los siguientes polinomios:

a) $4x^3 - 2x^2 + 6x - 3 =$

b) $x^4 - x^3 + x - 1 =$

c) $x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 4 =$

d) $2x^5 - x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 8x - 4 =$

Actividad N.° 12: Expresar cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio:

a) $4x^2 - 4x + 1 =$

b) $x^6 + 4x^3 + 4 =$

c) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} =$

d) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} =$

Actividad N.° 13: Expresar cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio:

a) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125 =$

b) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 =$

c) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1 =$

d) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} =$

Actividad N.° 14: Factorear las siguientes diferencias de cuadrados:

a) $4a^2 - 9b^4 =$

b) $\frac{4}{49}x^4 - \frac{1}{9}y^2 =$

c) $-0{,}81a^4b^2 + \frac{25}{4}m^6 =$

d) $36m^4 - 25n^2 =$

e) $0{,}25m^4n^2 - 0{,}09x^8y^6 =$

f) $\frac{121}{169}m^4 - \frac{49}{144}a^2 =$

Actividad N.° 15: Factorear las siguientes sumas y diferencias de potencias de igual grado:

a) $x^7 + 128 =$

b) $x^5 - \frac{1}{32} =$

c) $y^3 + 27 =$

d) $y^4 - 81 =$

e) $x^6 + 64 =$

f) $x^6 - \frac{1}{64} =$

g) $x^3 - 1000 =$

h) $y^4 - 625 =$

Actividad N.° 16: Factorear la ecuación de segundo grado:

a) $2x^2 + 5x - 3 =$

b) $\frac{1}{7}x^2 - x + \frac{10}{7} =$

c) $5x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{15}{8} =$

d) $\frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{7}{4} =$

Actividad N.° 17: Factorear las siguientes expresiones, combinando los distintos casos de factoreo:

a) $x^2 + ax + bx + ab =$

b) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{25} =$

c) $4x^2y - 12xy^2 =$

d) $x^2 - x + \frac{1}{4} =$

e) $2x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 2 =$

f) $100y^2 - 81 =$

g) $x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 =$

h) $x^3 - 225x =$

i) $y^2 - 8y - y + 8 =$

j) $y^2 + 36 + 12y =$

k) $27x^3 - 54x^2 + 4x - 8 =$

l) $\frac{14}{9}x^5 - \frac{35}{6}x^6 + \frac{21}{12}x^2 =$

m) $ax^2 + ay - bx^2 - by =$

n) $2x^2 + 50a^2 - 20ax =$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Una expresión algebraica es fraccionaria cuando tiene por lo menos una letra que figura como divisor o tiene exponente entero negativo.

Ejemplo: $-\frac{3a+2x}{5a-2x}$; $\frac{4}{x}$; $\frac{x^2-2x+4}{x+2}$

Simplificación de Expresiones algebraicas fraccionarias

Para simplificar una expresión fraccionaria es necesario que existan factores comunes en el numerador y denominador; de lo contrario, la expresión es irreducible.

Ejemplo:

a) $\frac{(x-2)(x+2)}{(x+5)(x+2)}$ simplificamos los factores comunes $\frac{x-2}{x+5}$ $x \neq -2, x \neq -5$

Las dos expresiones anteriores son equivalentes

b) $\frac{x+3}{x^2+3x} \implies h(x) = \frac{x+3}{x(x+3)} \Longrightarrow h(x) = \frac{1}{x}$ $x \neq 0, x \neq -3$

Reducción de fracciones algebraicas a común denominador

Reducir dos o más fracciones algebraicas a común denominador es transformarlas en otras que tengan el mismo denominador y sean respectivamente iguales a las dadas.

Para reducir dos o más fracciones algebraicas a mínimo común denominador se transforman en otras, respectivamente iguales, que tengan por denominador el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores y por numeradores, los productos que se obtienen multiplicando los cocientes de dicho m.c.m., por cada denominador, por los numeradores respectivos

Ejemplo: Determinar el m.c.m. de los denominadores:

$$\frac{2}{x^2-y^2};\frac{y}{2x\cdot(x+y)};\frac{x}{2y(x-y)};$$

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$2x\cdot(x+y)$ el m.c.m $=2xy\cdot(x+y)(x-y)$

$2y\cdot(x-y)$

Luego:

$$\frac{2}{x^2-y^2}=\frac{2\cdot 2xy}{2xy(x+y)(x-y)}=\frac{4xy}{2xy(x^2-y^2)}$$

$$\frac{y}{2x\cdot(x+y)}=\frac{y\cdot y(x-y)}{2xy(x+y)(x-y)}=\frac{y^2(x-y)}{2xy(x^2-y^2)}$$

$$\frac{x}{2y(x-y)}=\frac{x\cdot x(x+y)}{2xy(x+y)(x-y)}=\frac{x^2(x+y)}{2xy(x^2-y^2)}$$

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Para operar con expresiones racionales o fraccionarias, aplicaremos las mismas propiedades que se usan para operar con fracciones numéricas.

Suma o resta de fracciones algebraicas de igual denominador

Para sumar o restar dos o más fracciones de ***igual denominador*** se procede como en el caso de las fracciones numéricas, formando una fracción algebraica cuyo denominador es igual al de las fracciones dadas y cuyo numerador es la suma o la resta de los numeradores.

Ejemplo:

a) $\frac{x}{x-2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{x+x+2}{x-2}=\frac{2x+2}{x-2}=\frac{2(x+1)}{x-2}$

b) $\frac{1}{x-1}-\frac{2x-1}{x-1}=\frac{1-(2x-1)}{x-1}=\frac{1-2x+1}{x-1}=\frac{2-2x}{x-1}=\frac{-2(x-1)}{x-1}=-2$

Suma o resta de fracciones algebraicas de distinto denominador

Para sumar o restar dos o más fracciones de ***distinto denominador*** se reducen primero las fracciones a mínimo común denominador, luego se procede como en el caso de igual denominador.

Ejemplo:

a) $\frac{x}{x-2}+\frac{3x-1}{x^2-2x}=\frac{x}{x-2}+\frac{3x-1}{x(x-2)}=\frac{x^2}{x(x-2)}+\frac{3x-1}{x(x-2)}=\frac{x^2+3x-1}{x(x-2)}$

Se halla el m.c.m. y las

Se factorean los denominadores

Se suman los numeradores

b) $\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{x(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}-\frac{2(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x^2-x-2x-2}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x^2-3x-2}{(x-1)\cdot(x+1)}$

Se halla el m.c.m. y las fracciones equivalentes

Se restan los numeradores

c) $\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{(x+1)\cdot(x-1)}-\frac{x}{x+1}$

Se factorean los denominadores

$=\frac{x+1}{2(x+1)\cdot(x-1)}+\frac{2\cdot2}{2(x+1)\cdot(x-1)}-\frac{2x\cdot(x-1)}{2(x+1)\cdot(x-1)}$

Se halla el m.c.m. y las fracciones equivalentes

$=\frac{x+1+4-2x\cdot(x-1)}{2(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{x+5-2x^2+2x}{2(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{-2x^2+3x+5}{2(x+1)\cdot(x-1)}$

$=\frac{(-2x+5)(x+1)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{(-2x+5)}{2(x-1)}$

Se factorea el numerador y se simplifica

Multiplicación de fracciones algebraicas

El producto de varias fracciones algebraicas es otra fracción algebraica que tiene por numerador el producto de los numeradores de las fracciones dadas y por denominador el producto de los denominadores.

En la práctica, se factorean el numerador y denominador de cada una de las fracciones dadas luego se simplifica y por último se resuelve.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot S(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^2}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{3x^3-x}=\frac{x^2}{(x+2)\cdot(x-2)}\cdot\frac{x+2}{x(3x^2-1)}=\frac{x}{(x-2)\cdot(3x^2-1)}$$

División de fracciones algebraicas

El cociente de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica que se obtiene multiplicando el dividendo por la fracción inversa del divisor.

En la práctica, se factorea el numerador y el denominador de las fracciones dadas y se efectúan todas las multiplicaciones posibles para obtener una fracción reducida a su más simple expresión

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{x}{x-2} : \frac{x+2}{3x-1} = \frac{x}{x-2} \cdot \frac{3x-1}{x+2} = \frac{x \cdot (3x-1)}{(x-2) \cdot (x+2)}$$

Recordar que tanto en la multiplicación como en la división se debe simplificar siempre que sea factible.

OPERACIONES COMBINADAS

Cualquier combinación de las cuatro operaciones con fracciones algebraicas da como resultado una expresión algebraica fraccionaria o entera.

Para resolver las operaciones combinadas se debe tener en cuenta la simplificación, multiplicación, división, suma y resta de fracciones algebraicas.

Recordar: Para resolver una operación combinada se debe:

- Separar en términos
- Efectuar las operaciones indicadas en cada término;
- Si es posible, simplificar e indicar la condición de posibilidad.

Ejemplo:

a) $\frac{\frac{1}{x}-2}{\frac{x+1}{x^2}} - \frac{3x}{x+1} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}}{\frac{x+1}{x^2}} - \frac{3x}{x+1} = \frac{\frac{1-2x}{x}}{\frac{x+1}{x^2}} - \frac{3x}{x+1}$

$= \frac{1-2x}{x} \cdot \frac{x^2}{x+1} - \frac{3x}{x+1} = \frac{x-2x^2}{x+1} - \frac{3x}{x+1}$

$= \frac{x-2x^2-3x}{x+1} = \frac{-2x^2-2x}{x+1} = \frac{-2x(x+1)}{x+1} = -2x$

$\forall x: x \neq 0 \ \wedge \ x \neq -1$

b) $\frac{x^2+2x-3-x(x+3)}{\frac{x+3}{(x+4)^2}} : \frac{4}{x+4} = \frac{x^2+2x-3-x^2-3x}{\frac{x+3}{(x+4)^2}} \cdot \frac{x+4}{4} = \frac{-x-3}{\frac{x+3}{4(x+4)}} = -(x+3) \cdot \frac{4(x+4)}{x+3} = -4(x+4)$

$\forall x: x \neq -3 \ \wedge \ x \neq -4$

Unidad 4 - Expresiones Algebraicas

Actividad N.° 18: Marcar con una cruz las expresiones algebraicas fraccionarias:

a) $3x^2 - \frac{1}{2}x - 5$ ..... b) $5x^{-1}$ ..... c) $\frac{x-2}{3}$..... d) $(x+3):x^5$ .....

Actividad N.° 19: Simplificar las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$ b) $\frac{x^3-x^2}{x^3-2x^2+x}$

c) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-9x^2+27x-27}$ d) $\frac{x^2+7x+10}{x^2-25}$ e) $\frac{x^5-16x}{x^2-2x}$

Actividad N.° 20: Efectuar las siguientes sumas y restas de igual denominador:

a) $\frac{2x}{x+4} + \frac{8}{x+4} =$ b) $\frac{6x^2}{4x-8} - \frac{12x}{4x-8} =$

c) $\frac{2x-x^3}{x^2} - \frac{x(x+2)}{x^2} =$ d) $\frac{3x^3+1}{12x^2} + \frac{5x^3-1}{12x^2} =$

e) $\frac{1+x}{x^2-1} - \frac{4x^2}{x^2-1} + \frac{5x^2-x}{x^2-1} =$ f) $\frac{x}{2x-6} - \frac{3}{2x-6} =$

Actividad N.° 21: Efectuar las siguientes sumas algebraicas:

a) $\frac{10}{x-2} + \frac{8}{x+2} =$ b) $\frac{12}{x^2+2x} + \frac{6}{x+2} - \frac{2}{x} =$

c) $\frac{x^2+6x+9}{x+3} + \frac{x^2-9}{x-3} =$ d) $\frac{8}{x^2-4} + \frac{x+4}{x+2} =$

e) $\frac{x+5}{x^2+10x+25} - \frac{x+4}{x^2-16} =$ f) $\frac{1}{2x-1} + \frac{2x}{1-2x} =$

g) $\frac{x^2+2}{(x-2)\cdot(x^4-1)} - \frac{3x}{x^5+2x^4-x-2} =$ h) $\frac{3x^3}{(x+2)\cdot(x-2)} - \frac{24x}{x^2-4} + \frac{48}{x^3-4x} =$

i) $\frac{2}{x-5} - \frac{10}{x^2-25} - \frac{1}{x+5} =$ j) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} =$

k) $\frac{x}{3x-9} - \frac{6}{x^2-9} =$

Actividad N.° 22: Efectuar las siguientes multiplicaciones y divisiones:

a) $\frac{2}{x^2-3x} \cdot \frac{x-3}{x} =$

b) $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-2x+4} \cdot (x^3+8) \cdot \frac{-8x}{2x^2+3x-2} =$

c) $\frac{x^3-8}{x^2-4} : \frac{2x^4+4x^3+8x^2}{2x^3+4x^2} =$

d) $\frac{x^2+x-6}{x^2-1} : \frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2} =$

e) $\frac{x^3-81x}{x^2-y^2} : \frac{x^2-81}{x^4-2x^2y^2+y^4} =$

f) $\frac{x^2-9}{2x+4} \cdot \frac{x+2}{x^2-4x+3} \cdot (x+1) =$

g) $\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} =$

h) $\frac{1}{x} \cdot \frac{x+1}{x^2+x} \cdot \frac{x^4-1}{x^2-1} =$

Actividad N.° 23: Efectuar las siguientes operaciones combinadas:

a) $\frac{\frac{x^2+7x+6}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{\frac{x^2+6x+5}{x^2-1}} =$

b) $\frac{\frac{x}{x-3} + \frac{2}{x^2-6x+9}}{\frac{x-2}{x-3}} =$

c) $\frac{\frac{x-7}{x^2-16}}{\frac{x^2-14x+49}{x+4}} - \frac{\frac{x+4}{x^2-16}}{4} =$

d) $\left(\frac{x}{\frac{1}{x}} : \frac{x^2}{\frac{1}{x^2}}\right) + \left(\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}}\right) =$

e) $\frac{\frac{x^3+3x^2+3x+1}{(x+1)^2}}{\frac{x^3-3x^2+3x-1}{(x-1)^2}} + \frac{x^2-1}{(x+1)^2} =$

f) $\frac{x^2-25}{x^2-2x-3} \cdot \frac{x-3}{x^2+10x+25} - \frac{x+5}{x^2+6x+5} =$

Autoevaluación

Escanear el siguiente código o usar el enlace para realizar la autoevaluación de la unidad 4.

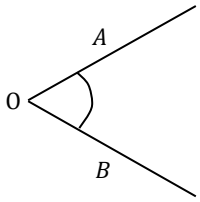
Autoevaluación Unidad 4

UNIDAD Nº5: TRIGONOMETRÍA

Las funciones trigonométricas fueron creadas originalmente para describir las relaciones que hay entre los lados y los ángulos de los triángulos. No obstante, como suele suceder a menudo en matemáticas, se descubrieron otras aplicaciones para estas funciones. Las áreas técnicas y científicas dependen bastante de las funciones trigonométricas.

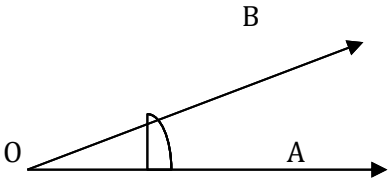
Iniciaremos nuestro estudio de la trigonometría repasando qué es un ángulo y cómo se mide. Luego definiremos las seis funciones trigonométricas para resolver problemas que impliquen triángulos rectángulos.

Generación de ángulos: En geometría se define ángulo $A\hat{O}B$ como la región del plano comprendida entre dos semirrectas (lados OA y OB), con un origen común denominado vértice (O).

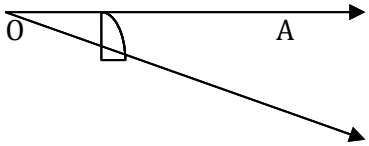


El ángulo α es positivo si su lado gira en sentido contrario al de las agujas del reloj, y negativo si gira en el mismo sentido que ellas.

Ejemplo:



Ángulo positivo



Ángulo negativo

Al hacer girar la semirrecta OA alrededor del origen O en sentido antihorario hasta ocupar la posición OB, se genera el ángulo α. La semirrecta OA puede girar cualquier número entero de revoluciones en sentido positivo o negativo, luego de las cuales su lado vuelve a quedar en la misma posición. Esto significa que a la posición del lado terminal le corresponde una infinidad de ángulos (positivos y negativos).

Estos ángulos pueden obtenerse por la expresión:

$$\beta = \alpha + 360° \cdot k, \text{ con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \text{ es decir, } k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo: Un ángulo de 130° tiene la misma posición de sus lados que: −230°, 490°, 850°, −590°, etc.

De acuerdo con lo anterior, todos los ángulos que tienen la misma posición que $\alpha = 130°$ están contenidos en la expresión:

$$\beta = 130° + 360°k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Sistemas de Medición de Ángulos

Los ángulos suelen medirse en unidades tales como el radián, el grado sexagesimal o el grado centesimal. A continuación, veremos cómo convertir de grados sexagesimales a radianes y de radianes a grados sexagesimales.

Los sistemas de medición de ángulos más usados son:

a) Sistema Sexagesimal

b) Sistema radial o circular

Sistema Sexagesimal

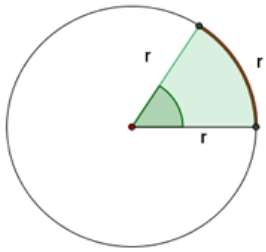
En el **sistema sexagesimal** la unidad de medida es el **grado,** el cual se define como la noventava parte de un ángulo recto y se lo nota por **1°**. Se llama **minuto** a la sesentava parte de un grado, denotándoselo por **1′**, y se llama **segundo** a la sesentava parte de un minuto, denotándoselo por **1″**. (Un ángulo recto = 90°)

$\frac{1 \text{ ángulo recto}}{90} = 1°$ (un grado); $\frac{1°}{60} = 1'$ (un minuto); $\frac{1'}{60} = 1''$ (un segundo)

1 ángulo recto = 90° $\quad 1° = 60' \quad 1' = 60''$

Sistema Radial o circular

En el sistema circular, la unidad de medida de un ángulo es el **radián**. Un **radián** (rad) es la medida del ángulo central de una circunferencia cuya longitud de arco coincide con la longitud de su radio.
1 rad → 57° 17′ 44,8″
360° → 2π radianes
180° → π radianes
En general: $\alpha° \rightarrow \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$ rad



Correspondencia entre sistema sexagesimal y circular

1 ángulo recto = 90°

1 ángulo recto = $\frac{\pi}{2}$ radianes

$$90° = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$

$1° = \frac{\pi}{180}$ radianes $\Longrightarrow 1\text{radián} = \frac{180°}{\pi}$

Dado un ángulo en grados sexagesimales, basta multiplicar su medida por $\frac{\pi}{180°}$ para obtenerlo expresado en el sistema circular. Recíprocamente, dado un ángulo en el sistema circular, basta multiplicar su medida por $\frac{180°}{\pi}$ para obtenerlo expresado en grados sexagesimales.

Ejemplo:

a) Expresar en sistema circular un ángulo de 36°.

$36° = \left(\frac{\pi}{180°} \cdot 36°\right)$ radianes $\Longrightarrow 36° = 0{,}62832$ rad

b) Expresar en grados sexagesimales un ángulo de 2,5 radianes.

$2{,}5\text{radianes} = \left(\frac{180°}{\pi} \cdot 2{,}5\right) = 143°14'22''$

La siguiente tabla reúne las medidas en grados y en radianes de algunos ángulos de uso frecuente:

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

Unidad 5 - Sistema sexagesimal Trigonometría

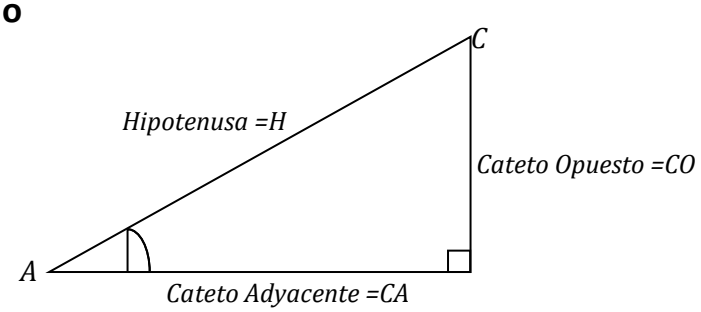
Recordar: los ángulos se clasifican en convexos y cóncavos.

Los **ángulos convexos** se clasifican a su vez en:

- Ángulo nulo: $\alpha = 0°$
- Ángulo agudo: $0° < \alpha < 90°$
- Ángulo recto: $\alpha = 90°$
- Ángulo obtuso: $90° < \alpha < 180°$
- Ángulo llano: $\alpha = 180°$

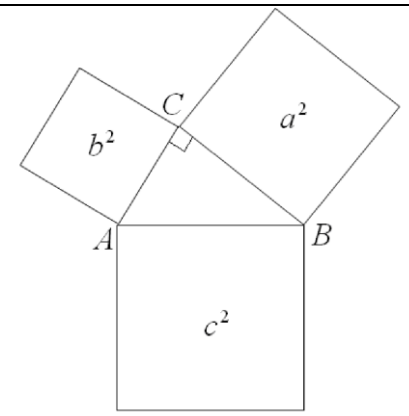
Los **ángulos cóncavos** miden entre 180° y 360°. Por ejemplo: 190°, 240°, 340°

Triángulo rectángulo



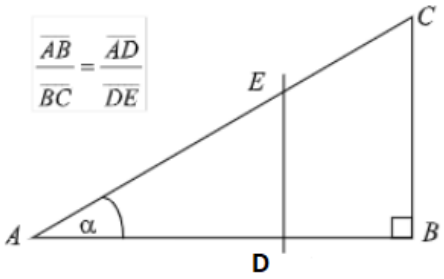
Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

$c^2 = a^2 + b^2$ (c: hipotenusa; a y b: catetos)	

Triángulos Rectángulos Semejantes

Si en un triángulo rectángulo ABC trazamos una paralela a uno de los catetos, formamos otro triángulo rectángulo, ADE, semejante al anterior porque ambos tienen un ángulo agudo en común. Por eso, la razón entre los catetos del triángulo ABC es igual a la razón entre los catetos del triángulo ADE, como muestra la figura:



Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas son los cocientes entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Son seis: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, que se abrevian sen, cos, tg, cotg, sec y cosec, respectivamente.

- Seno del ángulo α : es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{CO}}{\text{H}}$$

- Coseno del ángulo α : es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{CA}}{\text{H}}$$

- Tangente del ángulo α : es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{CO}}{\text{CA}}$$

- Cotangente del ángulo α : es el cociente entre el cateto adyacente y el cateto opuesto.

$$\text{cotg}\, \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\text{CA}}{\text{CO}}$$

- Secante del ángulo α: es el cociente entre hipotenusa y cateto adyacente.

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{H}}{\text{CA}}$$

- Cosecante del ángulo α: es el cociente entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

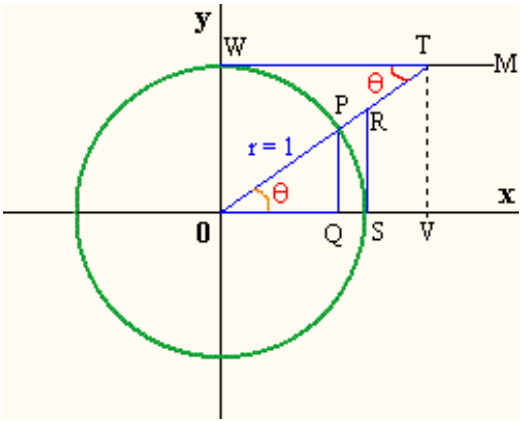
$$\text{cosec}\, \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\text{H}}{\text{CO}}$$

Importante: como hay distintos sistemas para medir ángulos, al usar la calculadora hay que elegir el modo: "DEG" para trabajar en grados y "RAD" para trabajar en radianes.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UNA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia goniométrica, trigonométrica o unitaria es una circunferencia de radio unitario, con su centro en el origen (0,0) de un sistema de coordenadas cartesianas.

En la **circunferencia goniométrica los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes** que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.



A continuación vamos a encontrar las líneas trigonométricas en el primer cuadrante (la forma de obtener las líneas trigonométricas en los otros tres cuadrantes es similar)

△ △ △ △

Los triángulos OQP, OSR, TWO y OVT son semejantes: los cuatro son rectángulos y tienen un ángulo agudo en común (θ). La consecuencia inmediata de esto es que la razón entre dos lados de cualquiera de ellos es igual a la razón entre los lados homólogos de los otros tres. Teniendo esto presente, y el hecho de que el radio de la circunferencia mide 1, vamos a deducir las líneas trigonométricas:

$$\text{Por ejemplo:} \quad \text{sen}\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{r} = \frac{PQ}{1} = PQ$$

De igual modo podríamos hacer para obtener las demás líneas trigonométricas:

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{r} = \frac{OQ}{1} = OQ$$

Por semejanza de triángulos, comparando OPQ y ORS tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{PQ}{OQ} = \dfrac{RS}{OS} \\ \text{tg}\theta = \dfrac{PQ}{OQ} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{tg}\theta = \frac{RS}{OS} = \frac{RS}{r} = \frac{RS}{1} = RS$$

Con igual razonamiento se podrían obtener los segmentos correspondientes a las líneas trigonométricas cotgθ, secθ y cosecθ.

Atención: A menudo, cuando se resuelven problemas de trigonometría, es necesario utilizar el ***ángulo de elevación***, que se define como el ángulo, medido desde la horizontal, que una persona tendría que elevar su línea de visión para ver un objeto. De manera semejante, el ***ángulo de depresión*** es el ángulo, medido desde la horizontal, que una persona tendría que bajar su línea de visión para ver un objeto.

En la siguiente figura se ven los dos ángulos el de elevación y el ángulo de depresión:



Tabla de razones Trigonométricas

θ	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**
sen	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**	**−1**
cos	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**−1**	**0**

tg	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	**∄**	**0**	**∄**

∄: la tangente no está definida en 90° ni en 270°, porque en esos ángulos el coseno vale 0.

Signos de las líneas

Según el cuadrante en el que se encontrar θ, cada razón trigonométrica tiene un signo. Los cuadrantes corresponden a los siguientes intervalos; los signos se deducen en la Actividad N.° 7.

- Si θ está en el I cuadrante: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
- Si θ está en el II cuadrante: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
- Si θ está en el III cuadrante: $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$
- Si θ está en el IV cuadrante: $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

Importante

senα y cosα toman todos los valores comprendidos entre −1 y 1, incluidos estos.

La tg α **y cotg**α pueden tomar cualquier valor real.

En cambio, secα y cosecα toman valores menores o iguales que −1 o mayores o iguales que 1.

Resolución de Triángulos rectángulos

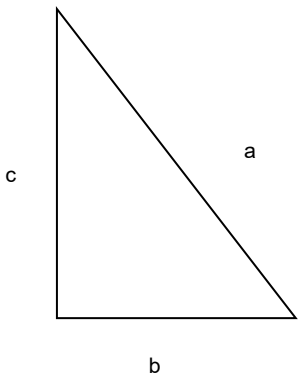
Para resolver un triángulo cualquiera es preciso conocer tres de sus elementos, entre los cuales figure un lado; pero cuando el triángulo es rectángulo, como un elemento está tácitamente dado (un ángulo recto) basta conocer los otros dos elementos, donde uno de ellos debe ser un lado.

Los casos de resolución que pueden presentarse son:

- Dados: la hipotenusa y un ángulo agudo.
- Dados: un cateto y un ángulo agudo.
- Dados: la hipotenusa y un cateto.
- Dados: los dos catetos.

Relaciones que vinculan los lados de un triángulo rectángulo

Las relaciones están dadas por el teorema de Pitágoras, que dice: “en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”. En la figura siguiente, la hipotenusa es a.



$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \Longrightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Para resolver triángulos hay que tener en cuenta que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°. Por lo tanto, en un triángulo rectángulo, conociendo un ángulo agudo α se puede encontrar el otro ángulo β, realizando la diferencia de $90° - \alpha$.

Cuando los triángulos no son rectángulos, se pueden aplicar el teorema del coseno o el teorema del seno, que se presentan más adelante.

Unidad 5 - Triángulo Rectángulo Razones

Actividad N.° 1: Convertir cada medida angular de grados a radianes:

a) 90° b) 45° c) 135° d) 225°

e) 180° f) −60° g) −235° h) 360°

Actividad N.° 2: Convertir cada medida angular de radianes a grados:

a) π b) $\frac{3}{4}\pi$ c) $-\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{5}{6}\pi$ f) 1,5 rad g) 4 rad h) −2,5 rad

Actividad N.° 3: Sabiendo que $\cos\alpha = 0{,}63$ y que α es agudo, calcular $\text{sen}\alpha$ y $\text{tg}\alpha$.

Actividad N.° 4: Sabiendo que $\text{tg}\alpha = 2$ y que α es agudo, calcular $\text{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$.

Actividad N.° 5: ¿Puede existir un ángulo cuyo coseno valga 2? Justificar.

Actividad N.° 6: Calcular la tangente del ángulo α si pertenece al primer cuadrante en a) y al segundo cuadrante en b):

a) $\text{sen}\alpha = 0{,}6$ b) $\cos\alpha = -0{,}3$

Actividad N.° 7: Completar la siguiente tabla con los signos que correspondan:

	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
senα				
cos α				
tgα				

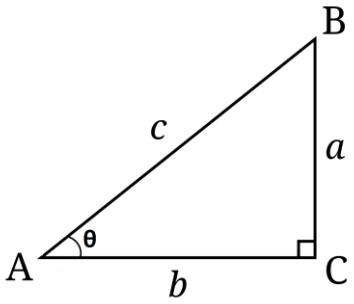
Actividad N.° 8: Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: Justificar

a) La tangente de un ángulo perteneciente al tercer cuadrante puede valer $-0{,}5$. ……..

b) La cosecante de un ángulo perteneciente al tercer cuadrante puede valer $-\frac{3}{2}$……

c) La secante de un ángulo perteneciente al primer cuadrante puede valer $\frac{3}{4}$……

Actividad N.° 9: Encontrar las razones trigonométricas del ángulo θ para los lados indicados del triángulo rectángulo ABC.



a) $a = 5;\ c = 12$

b) $a = 8;\ b = 5$

c) $a = 14;\ c = 20$

d) $b = 4{,}5;\ c = 6{,}2$

Actividad N.° 10: Sea θ un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. Dada una de sus razones trigonométricas, encontrar los valores de las demás.

a) $\cos\theta = \frac{8}{17}$ b) $\text{sen}\theta = \frac{3}{4}$ c) $\text{tg}\theta = 2{,}5$

d)$\text{sen}\theta = \frac{2}{5}$ e) $\cos\theta = 0{,}686$ f) $\text{tg}\theta = \frac{22}{20}$

Actividad N.° 11: Utilizar calculadora para determinar el valor de la función trigonométrica (tener en cuenta el modo en que está la calculadora).

a) cos 28°5′10″ b) sen 45° c) tg 75°16′

d) sen 0,25 rad e) cos 0,5 rad f) tg 0,65 rad

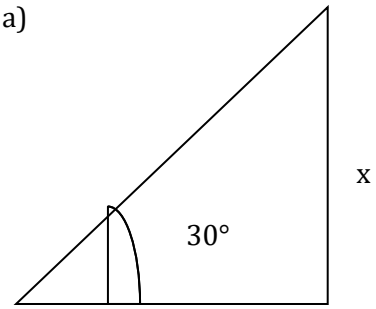
Actividad N.° 12: Dadas las siguientes razones trigonométricas, encontrar los ángulos agudos correspondientes:

a) sen$\theta = 0{,}732$ b) cos$\theta = 0{,}049$ c) tg$\theta = 0{,}839$

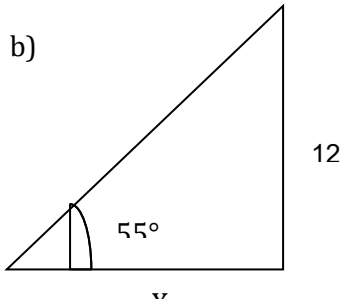
d) tg$\theta = 0{,}537$ e) sen$\theta = 0{,}285$ f) cos$\theta = 0{,}5$

Actividad N.° 13: Dados los siguientes triángulos determinar el lado marcado con x:

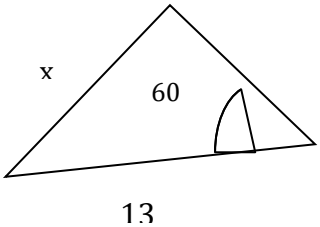
a)



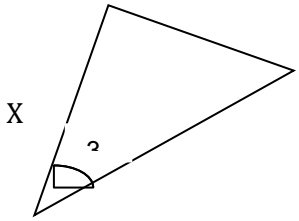
b)



c)



d)



Actividad N.° 14: Una persona está parada a 50 m de la base de una torre. El ángulo de elevación hasta la cima de la torre es de 76°. ¿Cuál es la altura de la torre?

Actividad N.° 15: Dos personas están a bordo de un globo que se eleva con aire caliente. Una de ellas observa desde la góndola que el globo pasa sobre un extremo de un campo de fútbol. El ángulo de depresión hasta el otro extremo del campo mide 53°. Esta persona sabe que la longitud del campo, incluyendo las zonas de los extremos, mide 150 m, ¿a qué altura pasó el globo sobre el campo?

Actividad N.° 16: Desde un punto sobre el suelo a 150 m de la base de un edificio, se observa que el ángulo de elevación hacia la parte superior del edificio es de 24° y que el ángulo de elevación hasta la parte superior del asta de la bandera es de 27°. Determinar la altura del edificio y la longitud del asta.

Actividad N.° 17: Desde la parte superior de un faro de 60 m de altura, el ángulo de depresión hasta un barco en el mar es de 23°. ¿A qué distancia está el barco de la base del faro?

Actividad N.° 18: Un hombre está tendido sobre la playa, haciendo volar una cometa. Sujeta el extremo de la cuerda de la cometa al nivel del piso y estima que el ángulo de elevación de la cometa es de 50°. Si la longitud de la cuerda es de 135 m, ¿a qué altura está volando la cometa sobre el nivel del piso?

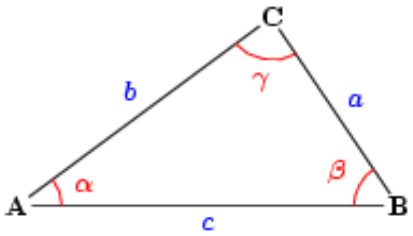
Actividad N.° 19: Un árbol de 17 m de altura proyecta una sombra de 13 m de largo, ¿cuál es el ángulo de elevación del sol en ese momento?

Actividad N.° 20: La luz sobre la parte superior de una torre tiene un ángulo de elevación de 53,7° cuando una persona está a 45 m de la base de la torre, ¿a qué altura está la luz?

Teorema del coseno

El teorema del coseno, muy utilizado en trigonometría, generaliza el teorema de Pitágoras a los triángulos no rectángulos: relaciona el tercer lado de un triángulo con los dos primeros y con el coseno del ángulo formado por estos dos lados.

Sea un triángulo ABC, en el cual utilizamos las notaciones habituales expuestas en la figura por una parte α, β y γ para los ángulos y, por otra parte, a, b y c para los lados respectivamente opuestos a estos ángulos. Entonces, el teorema del coseno se enuncia de la siguiente manera:

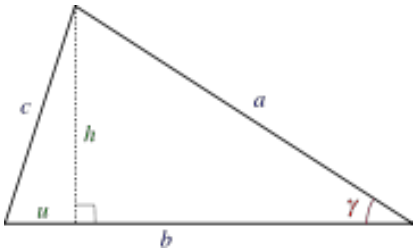


Notaciones habituales en un triángulo cualquiera.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Notemos que el teorema del coseno es equivalente al teorema de Pitágoras cuando el ángulo γ es recto. Hay dos casos a considerar: cuando c es un lado de un ángulo obtuso y cuando no lo es.

Primer caso: c es adyacente a dos ángulos agudos.



De acuerdo con la figura, el teorema de Pitágoras establece que $c^2 = h^2 + u^2$

En el otro triángulo rectángulo de la figura, también por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 - (b-u)^2$$

Combinando ambas ecuaciones:

$$c^2 = u^2 + a^2 - b^2 + 2bu - u^2 = a^2 - b^2 + 2bu$$

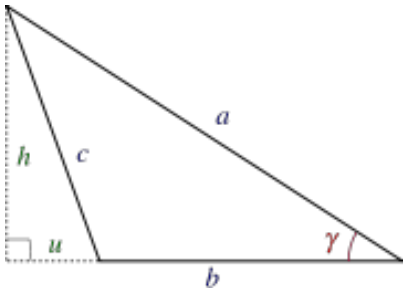
Usando la definición de coseno: $\cos(\gamma) = \frac{b-u}{a}$, por lo tanto, $u = b - a\cos(\gamma)$

Sustituimos en la expresión para c^2 y simplificamos:

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2b[b - a\cos(\gamma)]$$

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2b^2 - 2b \cdot a\cos(\gamma)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Segundo caso: c es adyacente a un ángulo obtuso.



Consideremos la figura adjunta. El teorema de Pitágoras establece que:

$$c^2 = h^2 + u^2$$
$$h^2 = a^2 - (b+u)^2$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos

$$c^2 = u^2 + a^2 - b^2 - 2bu - u^2 = a^2 - b^2 - 2bu$$

Usando la definición de coseno, se tiene:

$$\cos(\gamma) = \frac{b+u}{a}$$

Y por tanto:

$$u = a\cos(\gamma) - b$$

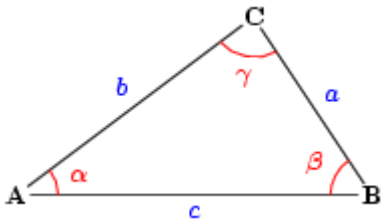
Sustituimos en la expresión para c^2 y simplificamos:

$$c^2 = a^2 - b^2 - 2b[a\cos(\gamma) - b]$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

y esto concluye la demostración.

Es importante notar que, si se considera a u como un segmento dirigido, entonces solo hay un caso y las dos demostraciones se convierten en la misma.

Teorema del seno



En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos: $\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$

Ejemplo: determinar a si $c = 20$ cm, $\alpha = 45°$ y $\gamma = 60°$.

Entonces $\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} \Longrightarrow a = \frac{c\cdot\text{sen}\alpha}{\text{sen}\gamma}$ $a = \frac{20\text{cm}\cdot\text{sen}45°}{\text{sen}60°} = 16{,}33$ cm

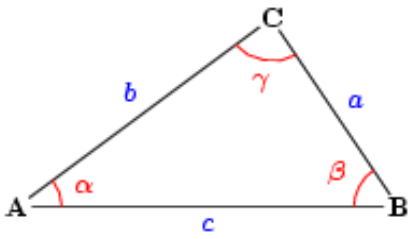
Área de un triángulo. Si se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, el área es $A = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\gamma$.

Ejemplo: si $a = 5\ cm$, $b = 7\ cm$ y $\gamma = 30°$, entonces $A = \frac{1}{2}\cdot 5\ cm \cdot 7\ cm \cdot \text{sen}30° = \frac{1}{2}\cdot 35\ cm^2 \cdot 0{,}5 = 8{,}75\ cm^2$.

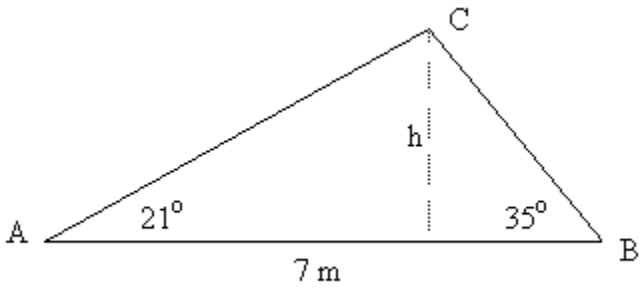
Unidad 5 - Triángulo Oblicuángulo

Actividad N.° 21: En un triángulo oblicuángulo, encontrar los valores de los lados b y c y el ángulo α, sabiendo que $a = 7$ cm, $\beta = 60°$ y $\gamma = 45°$.

Actividad N.° 22: Resolver el siguiente triángulo oblicuángulo, donde $a = 4$ cm, $b = 5$ cm y $\beta = 30°$.

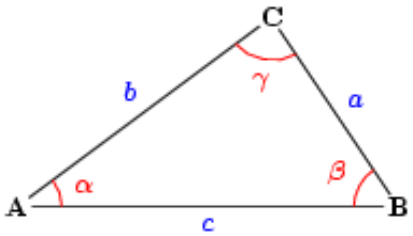


Actividad N.° 23: Encontrar el área del siguiente triángulo:



Actividad N.° 24:

Encontrar el lado faltante si $a = 5$ cm, $c = 7$ cm y $\beta = 60°$.



Actividad N.° 25: Un barco navega 40 km hacia el norte y luego 70 km en una dirección que forma un ángulo de 37° con el norte, hacia el este. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

Actividad N.° 26: Un topógrafo mide los tres lados de una chacra y obtiene 114, 165 y 257 m. ¿Cuánto mide el mayor ángulo del triángulo?

Identidades Trigonométricas

En la práctica es frecuente hallar problemas que incluyen dos o más ángulos y que comúnmente están relacionados con operaciones aritméticas (suma o resta de dos ángulos, múltiplos o fracciones de ángulos, etc.). Encontrar los valores de las funciones trigonométricas en estos casos es todo un arte; en su desarrollo entran en juego el manejo y conocimiento de las identidades trigonométricas.

Recordemos que una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que puede involucrar funciones trigonométricas o de otro tipo, y que puede o no tener solución; por el contrario, una identidad es un caso particular de ecuación que es cierta para todos los valores de la variable.

Las siguientes identidades se conocen como identidades pitagóricas:

- $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$
- $1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$

Otras identidades a tener en cuenta:

1. $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta$
2. $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$
5. $\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}$
6. $\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}$
7. $\text{sen}(2\alpha) = 2\,\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$
8. $\cos(2\alpha) = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$

Actividad N.° 27: Demostrar las siguientes identidades:

a) $\frac{\text{cotg}\alpha}{\text{cosec}\alpha} = \frac{1}{\sec\alpha}$

b) $\cos\alpha \cdot \text{cosec}\alpha \cdot \text{tg}\alpha = 1$

c) $\frac{1 - \text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1 + \text{sen}\alpha}$

d) $\frac{1 - \cos(2\alpha)}{\text{sen}(2\alpha)} = \text{tg}\alpha$

Autoevaluación

Escanear el siguiente código o usar el enlace para realizar la autoevaluación de la unidad 5.

Autoevaluación Unidad 5