TEORÍA Y PRÁCTICA

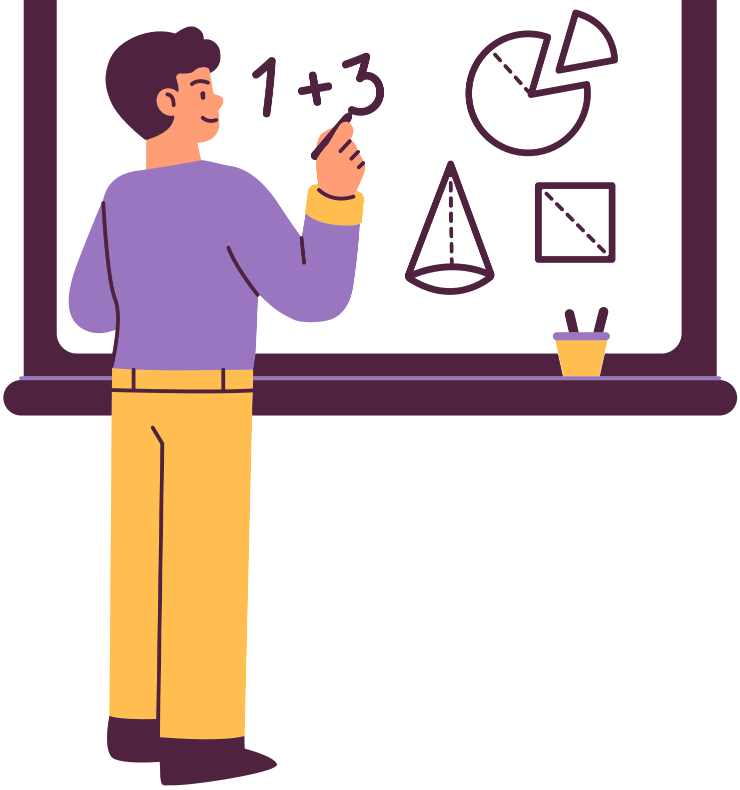
INGRESO DE MATEMÁTICA

FICA

Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de San Luis (UNSL)

INGENIERIAS 2026

UNIDAD 1



CONJUNTOS y NÚMEROS REALES

UNIDAD Nº1:

CONJUNTOS y NÚMEROS REALES

NOCIONES DE CONJUNTOS

Un **conjunto** es una colección de objetos que tienen una característica en común y éstos se denominan **elementos** o **miembros** del conjunto.

En aritmética y en álgebra los elementos de un conjunto por lo general son números. Cuando nos referimos a los conjuntos empleamos $\{\ \}$ para encerrar a los elementos (o descripción de la característica común de los mismos) y el uso de las letras mayúsculas para nombrar los conjuntos. Los elementos se escriben separados por comas, pueden ir en cualquier orden y figuran una sola vez.

Ejemplos:

A = {vocales del abecedario}	*Descripción verbal. Por comprensión.*
A = {*a*, *e*, *i*, *o*, *u*}	*Listado. Por extensión.*
A = {*x* / *x* es vocal}	*Notación constructor de conjunto. Por comprensión.*

El símbolo $\in$ indica pertenencia de un elemento a un conjunto y $\notin$ significa que no pertenece. Si observamos los conjuntos dados anteriormente, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ se lee "*a es un elemento del conjunto A*"; en cambio $\mathbf{b} \notin \mathbf{A}$ se lee "*b no es un elemento del conjunto A*".

El cardinal de un conjunto es el número de elementos que posee. A tiene 5 elementos, por lo tanto, el cardinal de A es 5 y se simboliza $|A| = 5$

Formas de describir un conjunto

- Descripción por extensión: se realiza nombrando todos los elementos del conjunto. Esto sólo puede hacerse cuando el cardinal del conjunto es finito.
  Ejemplo: *A* = {1, 3, 5, 7}

- Descripción por comprensión: se realiza especificando o enunciando una propiedad que identifique a todos los elementos del conjunto. En el caso que el cardinal sea muy grande o no es finito, es necesario emplear esta notación haciendo uso de una descripción.
  Ejemplo: $A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x\ es\ impar\ y\ 1 \leq x \leq 7\}$

Se lee: A es el conjunto cuyos elementos son los números naturales, impares y comprendidos entre el 1 y el 7 incluyendo ambos.

Conjunto referencial

Cuando hablamos, por ejemplo, del conjunto {1, 2, 3, 4} podemos decir que nos estamos refiriendo a elementos del conjunto $\mathbb{N}$ como conjunto de referencia o conjunto referencial de los números considerados. También podríamos haber dicho que nos estamos refiriendo a números naturales menores que 10, o a números naturales menores que 100. Es decir, tanto el conjunto $\mathbb{N}$ como el conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ como el conjunto $C = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x < 100\}$ pueden ser elegidos como conjunto de referencia al hablar del conjunto {1, 2, 3, 4}

> Para elegir el conjunto referencial de una situación, bastará con que todos los elementos que se quieran considerar en esa oportunidad estén en el referencial elegido.

Igualdad de Conjuntos

> Los conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos y se denota A = B

Ejemplo: $A = \{x \in \mathbb{Z} \ / -2 < x < 5\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x \leq 4\}$

Siendo $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, resulta que $A = B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ puesto que ambos conjuntos tienen los mismos elementos.

Conjunto Vacío

> Es el conjunto que no tiene elementos y se lo denota con el símbolo: ∅

Ejemplo: $A = \{x: x \ es\ una\ persona\ mayor\ que\ su\ abuela\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z}: x\ es\ múltiplo\ de\ 3\ y -1 < x < 2\}$.

Definido el conjunto B de esta manera, no existe ningún número entero que cumpla la condición dada ya que los enteros comprendidos entre -1 y 2 son 0 y 1, los cuales no son múltiplos de 3.

Por lo tanto, $A = B = \{\ \} = \emptyset$.

Conjunto Universal

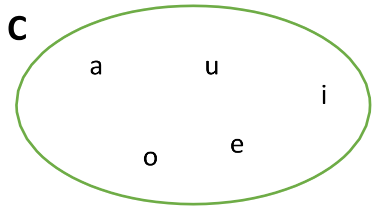
> Es el conjunto de todos los posibles elementos del tema en estudio y su símbolo es U.

Ejemplo: El conjunto de todos los números reales. El conjunto de los meses del año.

Representación gráfica de un conjunto

Para representar gráficamente a los conjuntos se suele utilizar los diagramas de Venn.

Ejemplo: $C = \{a, e, i, o, u\}$



Este tipo de representación brinda la ventaja de analizar con mayor claridad la relación entre dos o más conjuntos y favorece la obtención de conclusiones.

Subconjunto

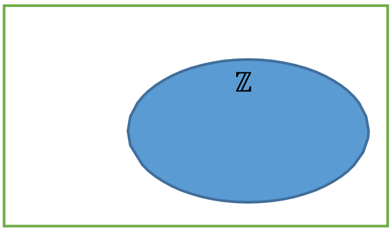
Si todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B y se denota como:

$$A \subseteq B$$

Esto se lee: "*A es subconjunto de B*", "*A está incluido en B*", "*A está contenido en B*", "*B incluye a A*" ó "*B contiene a A*".

Ejemplo:

- Los números enteros son un subconjunto de los números reales: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$



OPERACIONES CON CONJUNTOS

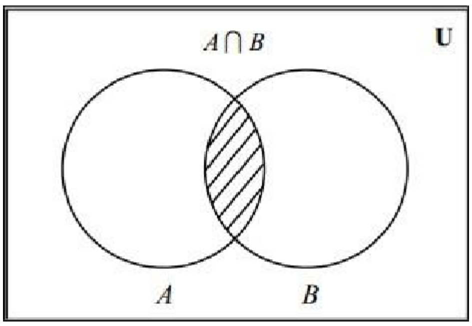
1. Intersección

Dados dos conjuntos A y B, se denomina intersección de A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y que pertenecen a B.

O sea, se refiere a los elementos comunes de ambos conjuntos y se denota: $A \cap B$

$$A \cap B = \{x / \ x \in A \ \ y \ \ x \in B\}$$

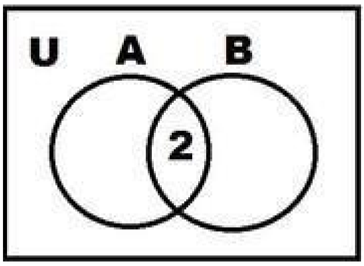
Gráficamente:



Ejemplo: Dados los conjuntos A y B, realizar la intersección de A y B.

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$



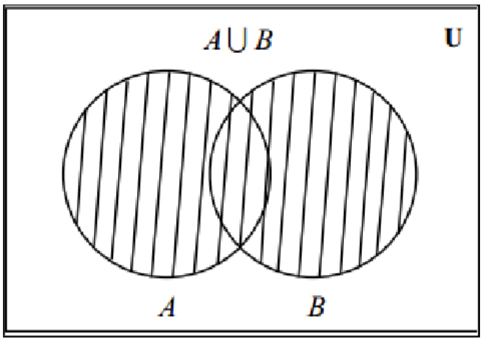
2. Unión

Dados dos conjuntos A y B, se llama unión de A y B al conjunto formado por los todos los elementos que pertenecen a A o que pertenecen a B.

Es decir, el conjunto resultante de la unión de A y B que se simboliza $A \cup B$, contiene los elementos que pertenecen a A o que pertenecen a B ó a ambos conjuntos.

$$A \cup B = \{x / \ x \in A \ \ o \ \ x \in B\}$$

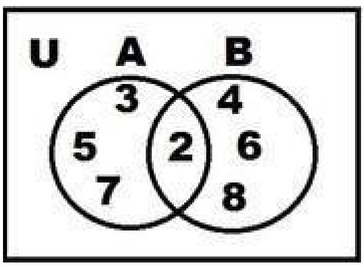
Gráficamente:



Ejemplo:

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

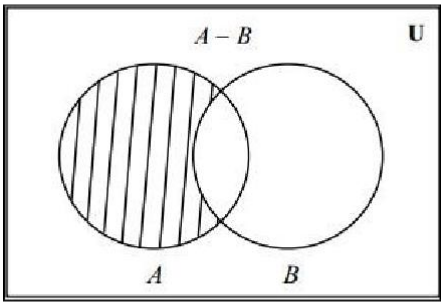


3. Diferencia

Dados dos conjuntos A y B, se denomina diferencia A – B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

$$A - B = \{x /\ x \in A \ \ o \ \ x \notin B\}$$

Gráficamente:



Ejemplo:

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

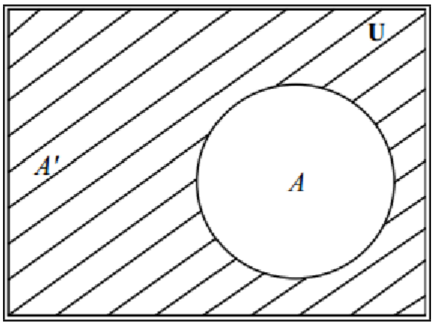
$$A - B = \{3, 5, 7\}$$

4. Complemento

Si A es el subconjunto del conjunto universal U, se dice que el complemento de A (relativo a U), es el conjunto formado por todos los elementos de U que no pertenecen a A.

$$A^C = A^{\prime} = \{\ x \in U \ /\ x \notin A\}$$

Gráficamente:



Ejemplo: Sea U = ℕ

Si $A = \{\ x \in \mathbb{N}\ /\ x \geq 10\}$ entonces $A^C = A^{\prime} = \{\ x \in \mathbb{N}\ /\ x < \ 10\}$

PROPIEDADES

Propiedades de la inclusión

i) $A \subset A$

ii) $\emptyset \subset A$

iii) $A \subset B \Rightarrow B \subset A \quad ; \quad sólo\ si\ A = B$

iv) $A \subset B\ \ y\ \ B \subset D \ \ \Rightarrow\ \ A \subset D$

Propiedades de la unión e intersección

i) Identidad	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
ii) Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
iii) Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
iv) Asociativa	$(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D)$	$(A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$
v) Distributiva	$(A \cup B) \cap D =$ $(A \cap D) \cup (B \cap D)$	$(A \cap B) \cup D =$ $(A \cup D) \cap (B \cup D)$
vi) Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
vii) Complementaridad	$A \cup A^c = U$	$A \cap A^c = \emptyset$

CONJUNTOS DE NÚMEROS

NÚMEROS NATURALES

Los denominados **Números Naturales** son los primeros números que se aprenden, son el 1, 2, 3, 4... etc**.** Fueron los primeros números inventados por la humanidad para contar u ordenar los elementos de un conjunto no vacío.

A los números naturales los simbolizamos con la letra **N**

N = {1*,* 2*,* 3*,* 4*,* 5*,....n,.....*}

Operaciones

La suma y el producto de números naturales son siempre naturales.

En cambio la diferencia no siempre es otro natural. Simbólicamente:

- Si **a ε *N* y b ε *N***, entonces **a + b ε *N*** (a y b se llaman términos o sumandos)
- Si **a ε *N* y b ε *N***, entonces **a. b ε *N*** (a y b se llaman factores)

Ejemplo:

a) 2 + 4 = 5 ε **N**

b) 3 . 5 = 15 ε **N**

c) $4 - 4 = 0 \notin \mathbf{N}$

d) $3 - 9 = -6 \notin \mathbf{N}$

NÚMEROS ENTEROS

Para dar solución al problema que se presenta al restar números naturales donde el minuendo es igual o menor al sustraendo, se crearon otros números que amplía al conjunto de números naturales. Se agregan el número cero y los números opuestos a los naturales. Este nuevo conjunto numérico recibe el nombre de **enteros** y lo simbolizamos con **Z**.

El conjunto de los números **enteros** está formado por la unión de los naturales, el cero y los opuestos de los naturales.

Simbólicamente se expresan **Z**= {... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}

Los **números enteros** permiten contar nuevo tipo de cantidades (como los saldos acreedores o deudores) y ordenar por encima o por debajo de un cierto elemento de referencia (las alturas sobre o bajo el nivel del mar o temperaturas superiores o inferiores a 0 grados, los pisos de un edificio por encima o por debajo de la planta baja, etc.).

Operaciones

- La **suma** y el **producto** de números enteros siempre da como resultado otro entero.

  Ejemplos:

  a) $4 + 5 = 9$
  b) $3 - 7 = -4$
  c) $-5 + 8 = 3$
  d) $4 . 9 = 36$
  e) $(-2).(-3) = 6$
  f) $2 .(-5) = -10$

- La **diferencia** a – b es considerada como la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo $a - b = a + (-b)$ donde a es el minuendo y b es el sustraendo

  Ejemplos:

  a) $9 - 10 = 9 + (-10) = -1$
  b) $8 - (-5) = 8 + 5 = 13$
  c) $(-2) - 5 = -7$
  d) $(-2) - (-5) = (-2) + 5 = 3$

- La **división** entre los enteros **a** y **b**, con $b \neq 0$, arroja como resultados dos números enteros Llamados cociente (**c**) y resto (**r**). Se denomina dividendo a **a** y a **b** se le dice divisor.

  La división se puede expresar como: $\boldsymbol{a = b \,.\, c + r}$

  Se dice que la división es **exacta**, si “*a es **múltiplo** de b*”, y “*a es **divisible** por b*”, o “*b es **factor** de a*” o que “***b divide** a **a***”.

Ejemplos:

a) – 20 es múltiplo de 5

b) 8 es factor de – 32

c) 3 es divisor de -9

d) 1 y -1 son divisores de n, n ε Z

e) 30 es múltiplo de 6

f) 9 tiene como divisores ± 1, ±3, ±9

g) El 5 tiene infinitos múltiplos: {5, 10, 15, …}

h) n es divisor de n, n ε Z, n es $\neq 0$

La división por cero no está definida para a/b y b ≠ 0. Ejemplo 2 : 0 y 0 : 0 no existe !!!

Regla de los signos

Para la adición	Para la multiplicación o Producto
+ (+a) = + a	(+a).(+b) = + a.b
-(-a) = + a	(-a).(-b) = + a.b
+(-a) = -a	(+a).(-b) = - a.b
-(+a) = -a	(-a).(+b) = - a.b

En el conjunto numérico de los números enteros no siempre es posible la división entonces aparecen los números Racionales.

NÚMEROS RACIONALES

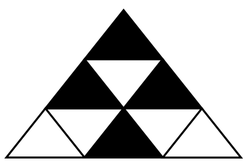
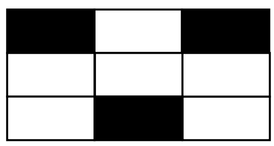
Los **números Racionales o también llamados Fraccionarios** se crearon para indicar una parte de algo, se pueden escribir como el cociente de dos enteros.

En símbolos $Q = \left\{ \frac{a}{b} / a,b \in Z \ y \ b \neq 0 \right\}$

Los números racionales representan partes de un todo

Las partes sombreadas de los siguientes objetos están representadas por números Racionales

Ejemplos:

 $\frac{2}{4}$	 $\frac{4}{9}$	 $\frac{3}{9}$

Los **números racionales** es un conjunto denso.

Entre dos números racionales hay infinitos números racionales. Esta afirmación podría justificarse sencillamente si tenemos en cuenta que la suma de racionales es siempre otro racional, el promedio será otro racional y estará comprendido entre ellos.

Podríamos continuar indefinidamente el procedimiento de promediar dos números racionales encontrando siempre que hay otro racional entre dos racionales por más próximos que estén. Por ello decimos que **Q es un conjunto denso**

NÚMEROS IRRACIONALES I

Todos los números racionales están representados por puntos sobre la recta numérica pero, *¿todos los puntos de la recta son representaciones de números racionales?* La respuesta es **NO**!!! Existen otros números que junto a los racionales completan la recta numérica. Ellos son los **números irracionales**.

Los **Números Irracionales** son los números que no se pueden expresar como fracción.

Luego a raíz de problemas geométricos se crearon los **Números Irracionales,** ellos no pueden representarse de ninguna de las formas hasta ahora vistas y son algunos de ellos √2, √3, -√5,π, etc.

Es cualquier número real que no es racional, es decir, es un número que ***no*** puede ser expresado como una fracción $\frac{a}{b}$ donde ***"a"*** y **"b"** son enteros, con $b \neq 0$ y donde esta fracción es irreducible.

Tras distinguir los números componentes de la recta real en tres categorías: (naturales, enteros y racionales), podría parecer que ha terminado la clasificación de los números, pero aún quedan "huecos" por rellenar en la recta de los números reales.

Los números irracionales son los elementos de dicha recta que cubren los vacíos que dejan los números racionales.

Los números irracionales son los elementos de la recta real que no pueden expresarse mediante el cociente de dos enteros y se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales que no siguen un periodo definido. De este modo, puede definirse número irracional como decimal infinito no periódico.

Toda expresión en números decimales es solo una aproximación en números racionales al número irracional referido, por ejemplo, el número racional 1.4142135 es solo una aproximación a 7 cifras decimales del número irracional raíz cuadrada de 2, el cual posee infinitas cifras decimales que no siguen un periodo.

Entonces, decimos con toda propiedad que el número raíz cuadrada de dos es *aproximadamente* igual a 1,4142135 en 7 decimales, o bien es *igual* a 1,4142135…, es decir, los tres puntos hacen referencia a los infinitos decimales que hacen falta y que jamás terminaríamos de escribir.

Debido a ello, los más célebres números irracionales son identificados mediante símbolos especiales; los tres principales son los siguientes:

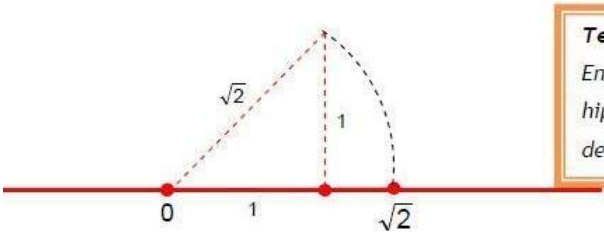
1. $\boldsymbol{\pi}$ (pi): relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro.
2. $\boldsymbol{e}$ (número de Euler): $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
3. $\boldsymbol{\varphi}$ (número áureo): $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ubicación exacta de $\sqrt{2}$

Con ayuda del Teorema de Pitágoras podemos ubicar de manera exacta a $\sqrt{2}$.

Si construimos un triángulo rectángulo de catetos unitarios, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$.

Luego con ayuda de un compás trasladamos la medida de la hipotenusa a la recta real.

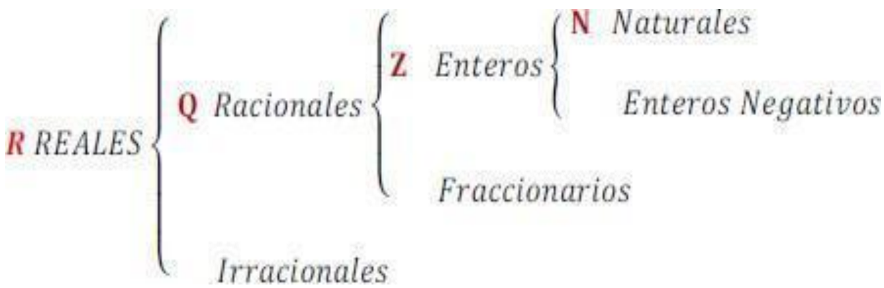


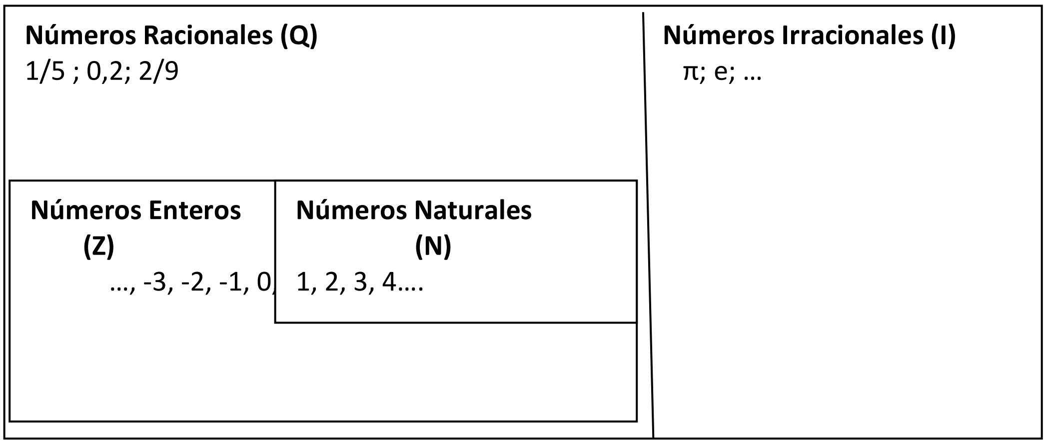
> ***Teorema de Pitágoras***
> *En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Entre los racionales y los irracionales se completa la recta numérica. Es decir, ya no queda ningún punto sobre la recta al que no le corresponda ya sea un número racional o un número irracional. Es por ello que se considera que si se unen los dos conjuntos, esto es, racionales más irracionales se forma un nuevo conjunto.

Definición

El conjunto de los **Números Reales** es la unión del conjunto de los Racionales al conjunto de los Irracionales. Simbólicamente: $R = Q \cup I$





CARACTERÍSTICAS DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

- ✔ Es un conjunto infinito
- ✔ No tiene primero ni último elemento
- ✔ Es un conjunto denso, entre dos números reales, existe siempre un número infinito de números reales.
- ✔ El conjunto de números reales completa la recta numérica ya que, si sobre una recta fijamos un origen y un segmento unidad, a cada número real corresponde un punto en la recta y a todo punto de la recta corresponde un número real.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades conmutativa y asociativa respecto a la suma y al producto

▪ **Conmutativa**		
$a + b = b + a$	$4 + 7 = 7 + 4$	Cuando se suman dos números el orden no importa
$a . b = b . a$	$3 . 2 = 2 . 3$	Cuando se multiplican dos números el orden no importa
▪ **Asociativa**		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(4 + 3) + 2 = 4 + (3 + 2)$	Cuando se suman tres números, no importa cuáles de ellos se suman primero
$(a . b) . c = a . (b . c)$	$(4 . 3) . 2 = 4 . (3 . 2)$	Cuando se multiplican tres números, no importa cuáles de ellos se multiplican primero
▪ **Distributiva**		
$a .(b + c) = a.b + a.c$ $(b+c) .a = b.a + c.a$	$4.(5 + 2) = 4.5 + 4.2$ $(4 + 5) . 2 = 4.2 + 5.2$	Cuando multiplicamos una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.

- Existen números reales que son **neutros** respecto de la suma y el producto.

  0 es el neutro respecto de la suma pues $a + \mathbf{0} = a$

  1 es el neutro respecto del producto pues $a.\mathbf{1} = a$

- Todos los números reales tienen opuesto, excepto el 0, y todos tienen recíproco.

  – ***a*** se dice inverso aditivo u opuesto de ***a***

  1/**a** se dice inverso multiplicativo o recíproco de ***a***

- La división de números reales **NO** goza de las propiedades conmutativas ni asociativa.

Unidad 1 - Números Reales

Ejemplos:

1) 4: 5 ≠ 5 : 4

2) 8 : (4 : 2) ≠ (8 : 4) : 2

- Pero goza de la propiedad distributiva a la izquierda.

  (**Sólo** es válido distribuir el divisor en las sumas y restas presentes en el dividendo)

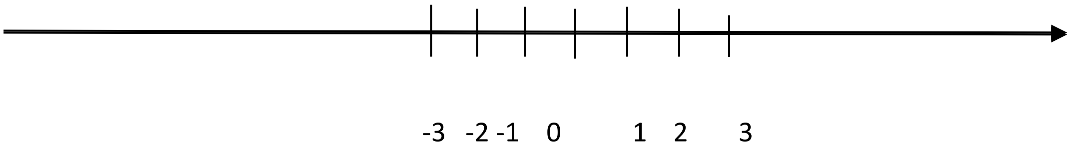
$$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c \qquad \frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$$

Ejemplos:

a) $$\frac{\sqrt{3}+3}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \qquad \frac{2a-3b}{2} = \frac{2a}{2} - \frac{3b}{2} = a - \frac{3b}{2}$$

REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL

Es posible establecer una relación biunívoca (1-1) entre el conjunto de los números reales y los puntos de una recta, así el conjunto de los números reales se puede representar gráficamente sobre una recta denominada “recta real” o “recta numérica”.
Para construir una recta numérica, se traza una recta horizontal, se elige un punto arbitrario al cual se le asigna el número cero (0) y se escoge un segmento unidad para tabular la recta.
Este punto que representa al cero, divide la recta en dos semirrectas opuestas, a la derecha generalmente se ubican los números reales positivos y a la izquierda los números reales negativos.
A cada número real le corresponde un único punto de la recta real y a cada punto de la recta numérica representa un único número real.



VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

La notación $|x|$ se emplea para expresar el valor absoluto de un número real.

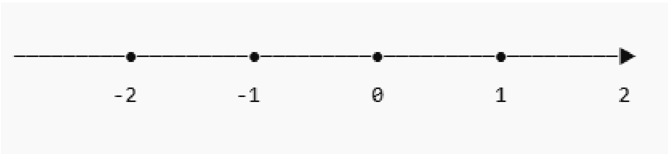
$$|x| = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x \leq 0 \end{cases}$$

Geométricamente, el valor absoluto de *x* es la distancia entre el punto de la recta representativo del número *x* y el punto que representa el cero.

Ejemplo:

El **valor absoluto** de un número representa su **distancia al cero en la recta real**, sin importar el signo.

$|x| = 2$ es $x = -2$ ó $x = 2$



Ejemplo:

$Si \; x^2 = 49, |x| = \sqrt{49}, x = 7 \; y \; x = -7$

ORDEN Y NOTACIÓN DE INTERVALO

Al representar los números reales en la recta numérica, se puede observar que este conjunto es ordenado. Es decir, que dados dos números reales a y b, se puede determinar siempre una relación de igualdad, menor o mayor. Esto significa que se comprueba una de las siguientes desigualdades: $a < b$ o $a \leq b$ o $a > b$ o $a \geq b$

Orden de los números reales

Sean a y b cualesquiera dos números reales.

Símbolo	Definición	Se lee
$a > b$	$a - b$ es positivo	*a* es mayor que *b*
$a < b$	$a - b$ es negativo	*a* es menor que *b*
$a \geq b$	$a - b$ es positivo o cero	*a* es mayor o igual que *b*
$a \leq b$	$a - b$ es negativo o cero	*a* es menor o igual que *b*

Son símbolos de desigualdades: >, <, ≥, ≤ .

Una propiedad importante para comparar dos números reales es la ***Ley de Tricotomía***.

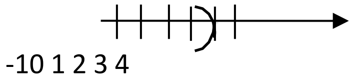
Ley de Tricotomía

Sean a y b cualesquiera dos números reales. Sólo una de las siguientes expresiones es verdadera:

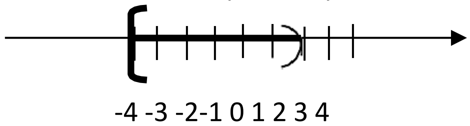
$$a < b, \quad a = b, \quad o\ a > b.$$

Es posible utilizar las desigualdades para expresar distintos intervalos de números reales. Por ejemplo:

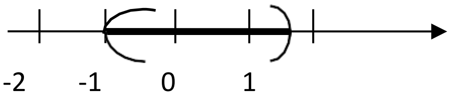
a) $x < 3$ la variable puede tomar cualquier valor de todos los números reales menores que 3.



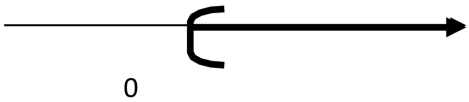
b) $-4 \leq x < 2$ expresa que la variable x puede tomar cualquier valor de todos los números reales entre -4 y 2 incluyendo al -4 .



c) $-1 < x < 1{,}5$ representa el intervalo de todos los números reales que están entre - 1 y 1,5.



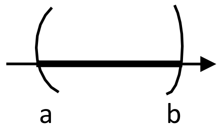
d) $x > 0$ es el intervalo o el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a cero.

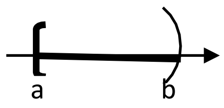
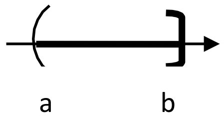


Existen distintos tipos de intervalos o conjuntos numéricos que se pueden representar con desigualdades, analíticamente o gráficamente**.** Pueden ser acotados o no acotados.

<u>Intervalos acotados de números reales</u>

Sean a y b números reales donde $a < b$.

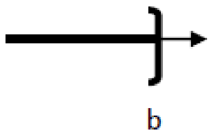
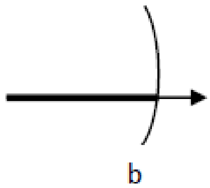
Notación de intervalo	**Tipo de intervalo**	**Notación de desigualdades**	**Gráfica**
$[a , b]$	Cerrado	$a \leq x \leq b$	
(a , b)	Abierto	$a < x < b$	

$[a\ ,b)$	Semi-abierto o semi-cerrado	$a \le x < b$	
$(a\ ,b]$	Semi-abierto o semi-cerrado	$a < x \le b$	

Los números *a* y *b* son los extremos de cada intervalo.
Los símbolos $-\infty$ (infinito negativo) y ∞ (infinito positivo), no son números reales, pero nos brindan la posibilidad de emplear la notación de intervalos no acotados.

Intervalos no acotados de números reales

Sean *a* y *b* números reales.

Notación de intervalo	Tipo de intervalo	Notación de desigualdades	Gráfica
$[a,\infty)$	Cerrado por izquierda y no acotado por derecha	$x \ge a$	
(a,∞)	Abierto por izquierda y no acotado por derecha	$x > a$	
$(-\infty,b]$	Cerrado por derecha y no acotado por izquierda	$x \le b$	
$(-\infty,b)$	Abierto por derecha y no acotado por izquierda	$x < b$	

Cada uno de estos intervalos tiene exactamente un extremo *a* o *b*.

ORDEN DE OPERACIONES

Para resolver operaciones aritméticas, se debe respetar ciertas reglas:

1. Primero resolver todo lo que esté dentro de símbolos de agrupación.

2. Evaluar las expresiones exponenciales.

3. Hacer todas las multiplicaciones y divisiones en orden de izquierda a derecha.

4. Hacer todas las sumas y restas en orden de izquierda a derecha.

Ejemplo:

$6 + 2 \,.\, (3^2 - 1)$

$6 + 2 \,.\, (9 - 1)$

$6 + 2 \,.\, 8$

$6 + 16$

22

Orden en el conjunto R

R es un conjunto ordenado. Esto es, dados dos números reales a y b vale una y solo una de las siguientes afirmaciones: $\boldsymbol{a < b}$ $\boldsymbol{a > b}$ $\boldsymbol{a = b}$

Propiedades de la Igualdad en R

- **Si sumamos o multiplicamos a ambos miembros de una igualdad por una misma constante se obtiene otra igualdad**

  Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$

  Si $a = b$, entonces $a.c = b.c$

Ejemplo:

Como $8 = \sqrt{8}.\sqrt{8}$, entonces se tiene que $8 + 1 = \sqrt{8}.\sqrt{8} + 1$

Como $4 = \sqrt{16}$, si multiplicamos ambos miembros por 3, la igualdad se conserva $4 \,.\, 3 = \sqrt{16} \,.\, 3$

- **Si sumamos o multiplicamos miembro a miembro dos igualdades se obtiene otra igualdad**

  Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$

  Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a \,.\, c = b \,.\, d$

Ejemplo:

$$4 = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{8} \quad \text{y} \quad 8 = \sqrt{8} \,.\, \sqrt{8} \quad \Longrightarrow \quad 4 + 8 = \sqrt{8} \,.\, (\sqrt{2} + \sqrt{8}\,)$$

$$\text{y} \quad 4 \,.\, 8 = \sqrt{2} \,.\, \left(\sqrt{8}\right)^3 \quad \Longrightarrow \quad 32 = \sqrt{2} \,.\, 8 \,.\, \sqrt{8} \quad \Longrightarrow \quad 32 = 8 \,.\, \sqrt{16}$$

- **Propiedades de la desigualdad**

✔ **Si a ambos miembros de una desigualdad se le suma una misma constante, la desigualdad se mantiene.**

$$Si\ a < b \quad \Longrightarrow \quad a + c\ <\ b + c$$

Ejemplo:

$$1 < \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad 1+2 \ < 2+\sqrt{3}$$

- **Si a ambos miembros de una desigualdad se multiplica por una misma constante positiva la desigualdad se mantiene**

$$Si\ a < b \quad y \quad c > 0 \quad \Longrightarrow \quad a.c \ < \ b.c$$

Ejemplo:

$$1 < \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad 1\,.\,2 \ < 2\,.\sqrt{3}$$

- **Si a ambos miembros de una desigualdad se multiplica por una misma constante negativa la desigualdad cambia de sentido**

$$Si\ a < b \quad y \quad c < 0 \quad \Longrightarrow \quad a.c \ > \ b.c$$

Ejemplo:

$$1 < \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad -1\,.\,2 \ > -2\,.\sqrt{3}$$

OPERACIONES CON RACIONALES Q

Suma y resta

1) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ 2) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} \pm \frac{c.b}{d.b} = \frac{a.d \pm c.b}{b.d}$	Para sumar fracciones con igual denominador se suman los numeradores Para sumar fracciones con distinto denominador, se encuentra el común denominador y luego se resuelve

Ejemplos:

1) $\frac{3}{4}+\frac{7}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3+7+1}{4}=\frac{11}{4}$

2) $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+2=\frac{6+15+36}{18}=\frac{57}{18}$

Producto y cociente

1) $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$ 2) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}$	Para multiplicar se efectúa el producto de los numeradores y de los denominadores. Para dividir fracciones se multiplica por el reciproco del divisor.

Ejemplos:

1) $\frac{7}{5}.\frac{3}{4}=\frac{7.3}{5.4}=\frac{21}{20}$

2) $\frac{3}{2}:\frac{5}{4}=\frac{3.4}{2.5}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

Potenciación

La operación de la potenciación se define como un producto particular. Sea $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$ **,** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ **,** se define la potencia enésima de $\boldsymbol{a}$ como el número $\boldsymbol{a^n}$ que es el resultado de multiplicar $\boldsymbol{a}$ por sí mismo $\boldsymbol{n}$ veces.

$$\boxed{\boldsymbol{a^n = a.a.a \ldots a\ (n\ veces)}}$$

$\boldsymbol{a}$ se denomina **base** y $\boldsymbol{n}$ se denomina **exponente.**

Propiedades

- Si $\boldsymbol{a \neq 0}$ **,** entonces $\boldsymbol{a^0 = 1}$
- Producto de potencias de igual base, se suman los exponentes

$$\boldsymbol{a^n.a^m = a^{n+m}}$$

- Cociente de potencias de la misma base se restan los exponentes

$$\boldsymbol{a^n : a^m = a^{n-m}}$$

- Potencia de un producto se distribuye la potencia

$$\boldsymbol{(a\,.\,b)^n = a^n.b^n}$$

- Potencia de un cociente se distribuye la potencia

$$\boldsymbol{(a:\ b)^n = a^n : b^n}$$

- Potencia de potencia se multiplican los exponentes

$$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n\,.\,m}}$$

- $\boldsymbol{a^{-1}}$ es el inverso de $\boldsymbol{a}$. Esto es:

$$\boldsymbol{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

- $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{(a)^n}}$

- $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$

Radicación

Sea $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$ **,** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$**,** se define la raíz enésima $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ como al número que elevado a la potencia $\boldsymbol{n}$ da como resultado

$$\boxed{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}}$$

$\boldsymbol{a}$ se denomina **radicando** y $\boldsymbol{b}$ se denomina **índice**.

La radicación de números no siempre es otro entero.

Ejemplo: $\left(\sqrt{8}\right)^3 = 2$ y $\sqrt{5}$ no es un entero.

La ***radicación*** goza de las siguientes propiedades, siempre que las raíces involucradas estén definidas.

Propiedades

- Distributiva respecto al producto y recíprocamente

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\,.\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}\,.\sqrt[n]{\boldsymbol{c}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{4\,.9} = \sqrt{36} = 6 = \sqrt{4}\,.\sqrt{9} = 2\,.3 = 6$$

$$\sqrt{9}\,.\sqrt{16} = 3\,.4 = 12 = \sqrt{9\,.16} = \sqrt{144} = 12$$

- Distributiva respecto al cociente y recíprocamente

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} : \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{100 : 25} = \sqrt{100} : \sqrt{25}$$

$$\sqrt{4} = 10 : 5 = 2$$

- Raíz de raíz, los índices se multiplican

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\,.\,n]{a}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[12]{5}$$

¡Cuidado!

La potenciación y la radicación no son distributivas respecto a la suma ni a la resta.

A continuación, se plantean situaciones de cálculos correctos e incorrectos.

Calculo Correcto	Cálculo Incorrecto
$(2+4)^2 = 6^2 = 36$	$(2+4)^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$
$(2-4)^2 = (-2)^2 = 4$	$(2-4)^2 = (2)^2 - (4)^2 = 4 - 16 = -12$
$\sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$	$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$
$\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$	$\sqrt{100-36} = \sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$

Simplificación

En una suma o resta no se puede simplificar **NUNCA** un término del numerador con un término o divisor del denominador.

Ejemplos: $\boxed{\dfrac{4+\cancel{5}}{16+\cancel{5}}}$ **NO** $\boxed{\dfrac{3+\cancel{2}}{5\cdot\cancel{2}}}$ **NO** $\boxed{\dfrac{3\cdot\cancel{2}}{5+\cancel{2}}}$ **NO**

En una multiplicación o división si se puede simplificar un factor del numerador con un divisor del denominador.

Ejemplo: $\boxed{\dfrac{4\cdot\cancel{5}}{16\cdot\cancel{5}}}$ **SI**

Simplificación del índice de la raíz con el exponente del radical

$$\sqrt[6]{a^9} = \sqrt{a^3}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{9^2} = \sqrt{9} = 3$$

Notación decimal

Todo número racional puede expresarse en notación decimal ya sea exacta o periódica.

Conversión de un número decimal a fracción:

	Regla	Ejemplo

Número Decimal			
Exacto		En el numerador se coloca el número sin comas y en el denominador se coloca el 1 seguido de tantos ceros como como cifras decimales tenga el número	$0{,}35 = \frac{35}{100}$ $2{,}124 = \frac{2124}{1000}$
Periódico	Puro	En el numerador se coloca la diferencia entre la expresión sin la coma y la parte anterior al período y como denominador tantos 9 como cifras tiene el período.	$0{,}565656\ldots = \frac{56}{99}$ $14{,}\hat{5} = \frac{145-14}{9} = \frac{131}{9}$
	Mixto	En el numerador se coloca la diferencia entre la expresión sin coma y la parte anterior al período y en el denominador tantos nueves como cifra tiene el periodo y tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica	$24{,}2\hat{5} = \frac{2425-242}{90} = \frac{2183}{90}$ $1{,}0353535.. = \frac{1035-10}{990} = \frac{1025}{990}$

OPERACIONES CON NÚMEROS IRRACIONALES

Radicales.

Las operaciones de suma, diferencia, producto, cociente y potenciación de números Irracionales no siempre arrojan como resultado otro irracional. ***¡Algunas veces los resultados son racionales!***

Los radicales son los números irracionales como:

Ejemplos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{7}$

Radicales semejantes.

Dos radicales son semejantes cuando tiene el mismo radicando y el mismo grado.

Ejemplos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$

En cambio, los radicales $\sqrt{3}$, $5\sqrt{5}$, $4\sqrt{7}$ son radicales **no** semejantes.

Algunas propiedades de radicación

Si $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ existen en el campo de los números Reales, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

a) Distributiva respecto a la multiplicación.

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}\,.\,\boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\,.\,\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{8x} = \sqrt[3]{8}\,.\,\sqrt[3]{x}$$

b) Distributiva respecto a la división.

$$\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}$$

siempre que $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{100}{25}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

c) Simplificación de índices: siempre que la potencia y el índice sean múltiplos.

Ejemplo: $\sqrt[\cancel{5}]{4^{\cancel{15}}} = 4^3$

Simplificación de radicales

Para simplificar radicales a su más simple expresión se descompone en sus factores primos.

Ejemplo: Descomponer $\sqrt{60}$

60	2
30	2
15	3
5	5
1	-

Luego:

$$\sqrt{60} = \sqrt{2^2.3.5}$$

$$\sqrt{60} = \sqrt{2^2}.\sqrt{3\,.\,5}$$

$$\sqrt{60} = 2.\sqrt{3\,.\,5}$$

$$\sqrt{60} = 2.\sqrt{15}$$

Extracción de factores fuera del radical

Para extraer factores fuera del radical se pueden hacer en aquellos casos en que el exponente del factor es mayor o igual que el índice del radical. Se divide el exponente por el índice, el cociente resulta ser el exponente del factor que sale y el resto es el exponente del factor que queda en el radicando.

$$\sqrt[3]{a^{17}} = a^{5}\sqrt[3]{a^{2}}$$

Ejemplo: $\sqrt{27y^5z^4} = 3.y^2.z^4 = 3.y^2.z^2.\sqrt{3y}$

Observación: Siempre para extraer factores fuera del radical la potencia debe ser igual o mayor al índice y los valores numéricos se deben descomponer.

Introducción de factores dentro del radical

Para introducir factores dentro del radical se multiplica el exponente del factor por el índice del radical

Ejemplo: $a^3.b.\sqrt[4]{a.b^3.c^5} = \sqrt[4]{a.b^3.c^5.a^{12}.b^4} = \sqrt[4]{a^{13}.b^7.c^5}$

OPERACIONES CON RADICALES

Suma algebraica

Para efectuar la suma algebraica, se simplifican los radicales, luego se reducen los radicales semejantes y por último se escriben los radicales no semejantes con su propio signo

Ejemplos:

a. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

b.

$$16\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 2\sqrt{12} =$$

$$16\sqrt{3} - 5\sqrt{3^3} + 2\sqrt{2^2.3} =$$

$$16\sqrt{3} - 5.3\sqrt{3} + 2.2\sqrt{3} =$$

$$16\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \mathbf{5\sqrt{3}}$$

c.

$$-\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} =$$

$$-\sqrt[3]{2^3.3} - \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2.3^3} =$$

$$-2\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = \mathbf{\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3}}$$

Multiplicación de radicales

Para multiplicar radicales se multiplican los coeficientes entre sí luego se multiplican los radicandos si las raíces tienen el mismo índice, en caso de que las raíces no tengan igual índica se debe sacar el común índice.

Ejemplos:

a. $2\sqrt[3]{5}\,.4\,.\sqrt[3]{25} = 8\,.\sqrt[3]{125} = 8\,.\sqrt[3]{5^3} = 8\,.5 = \mathbf{40}$

b.

$$\frac{2}{3}\sqrt{x\,.y^2}\,.\frac{1}{4}\,.\sqrt[3]{x^2.y^3} =$$

$$\frac{2}{12}\sqrt[6]{x^3.y^6.x^4.y^6} =$$

$$\frac{1}{6}\sqrt[6]{x^7.y^{12}} =$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{6}\,x\,.y^2\sqrt[6]{x}}$$

División de radicales

Para dividir radicales de igual índice se dividen los coeficientes entre sí, luego los radicando.

Si los radicales tienen distinto índice se saca primero el común índice y luego se sigue operando como se indicó en el párrafo anterior.

Ejemplos:

a. $\sqrt{3.z^3.y^2} : \sqrt{6.z.y^4} = \sqrt{\frac{3.z^3.y^2}{6.z.y^4}} = \sqrt{\frac{z^2}{2.y^2}} = \boldsymbol{\frac{z}{y}.\sqrt{\frac{1}{2}}}$

b. $2\sqrt[4]{3x^2y} : -\frac{1}{3}\sqrt[6]{zy^2} = -6\sqrt[12]{\frac{3^3x^6y^3}{z^2y^4}} = \boldsymbol{-6\sqrt[12]{\frac{27x^6}{z^2y}}}$

Unidad 1 - Operaciones con Radicales

Racionalización

Cuando tenemos una expresión en la cual aparece un radical en el denominador y queremos encontrar una expresión equivalente a esta, en la cual no aparezca el radical en el denominador decimos que hemos *racionalizado* el denominador.

A continuación, veremos algunos ejemplos:

- **El denominador es un radical cuadrático único:** Se multiplica tanto ese numerador como el denominador por ese radical, y se realizan todas las operaciones y simplificaciones necesarias para obtener un denominador racional.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} . \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a.\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{\boldsymbol{a.\sqrt{b}}}{\boldsymbol{b}}$$

- **El denominador es un radical único de índice mayor que 2 de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ $(n > m)$:** Se multiplica numerador y denominador por un radical de la forma $\sqrt[n]{a^{n-m}}$, para seguir operando y simplificando hasta obtener un denominador racional.

$$\frac{a}{\sqrt[5]{b^2}} = \frac{a}{\sqrt[5]{b^2}} . \frac{\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^3}} = \frac{a.\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^5}} = \frac{\boldsymbol{a.\sqrt[5]{b^3}}}{\boldsymbol{b}}$$

- **El denominador es un binomio en el que aparecen uno o dos raíces cuadradas:** Se multiplica numerador y denominador por su conjugado, y se realizan las operaciones y simplificaciones necesarias.

Ejemplos:

a) $\frac{3}{2-\sqrt{b}} = \frac{3}{2-\sqrt{b}} . \frac{(2+\sqrt{b})}{(2+\sqrt{b})} = \frac{\boldsymbol{3.(2+\sqrt{b})}}{\boldsymbol{4-b}}$

b) $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} . \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\boldsymbol{a.(\sqrt{a}-\sqrt{b})}}{\boldsymbol{a-b}}$

Unidad 1 - Racionalización

tividad 1: Cuáles son los elementos de:

a) El conjunto de los días de la semana.
b) El conjunto de las estaciones del año.
c) Los números impares menores a 11.

d) Los números pares mayores a 10 y menores a 20.

Actividad 2: ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son: vacíos, unitarios, finitos, infinitos?

a) A = {x / x es día de la semana}
b) B = {vocales de la palabra vals}
c) C = {1, 3, 5, 7, 9, ...}
d) D = {x / x es un habitante de la luna}
e) E = $\{x \in \mathbb{R} / x < 15\}$
f) F = $\{x \in \mathbb{N} / 5 < x < 15\}$
g) G = $\{x \in \mathbb{N} / x > 15\}$

Actividad N° 3: Siendo los conjuntos A = {a,b,c,d}, B = {a, b,1} y C = {1,2,3}

a. $A \cup B$
b. $B \cap C$
c. $B \cap C\ (A \cup B) \cup C$
d. $(A \cup B) \cap C$

Actividad Nº 4: Completen con una X a qué campo numérico pertenecen los números indicados.

	24	6	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{5}$	11π	9,12	$0,\widehat{32}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$	-(-4) +5	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\sqrt[3]{-27}$
N											
Z											
Q											
I											
R											

Actividad Nº5: Dados los siguientes números

$$1{,}5\ ;\ -3{,}124\ ;\ -9\ ;\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\ ;\ e\ ;\ 1002\ ;\ \sqrt{11}\ ;\ 7\ ;\ \sqrt[3]{0.125}\ ;\ -1.33333\ldots$$

A. Indiquen:

a) Los números enteros que no son naturales	
b) Los números racionales que no son enteros	
c) Los números reales que son racionales	
d) Los números reales que son irracionales	

B. Tacha los números que no correspondan a su clasificación:

Naturales **N**	0; -2; 1/3; -0,2; 5; ϕ ; 12,143; 1,452111…
Enteros **Z**	-3; 4/3; 0; 2π; -3,2; 4; -2,5
Racionales **Q**	-3, 0 , $-2,12\hat{4}$, $\left(\frac{5}{2}\right)$; $\sqrt{5}$; 8, $\sqrt[3]{0,125}$
Irracionales **I**	5 ; $12,5\hat{4}$; -32 ; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, π ; $2\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{13}$, $-2,7$.

Unidad 1- Ejercicios Combinados

<u>Actividad Nº6:</u> Resolver los siguientes ejercicios:

a) 16 : 8 – 2 – (- 4 + 2) + 5 . (- 1) =

b) 8 – 6 : (- 3) + 4 . (- 2) – 3 . (- 4) =

c) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{16}\right).\frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right).10}=$

d) $\left[\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{5}{6}\right)}\right]^2=$

e) $\left(-\frac{4}{3}\right)^4.\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}-\sqrt{2}.\left(\sqrt{2}-18^{-\frac{1}{2}}\right)-\sqrt{\frac{1}{64}.\frac{8}{3}}=$

f) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}.\left(2-\frac{7}{5}\right)^2.(-1)^3=$

Actividad Nº7: Completar con mayor (>), menor (<) o igual (=), según corresponda

a) $2^3.....3^{-1}$ b) $-3^2.....(-3)^2$ c) $\frac{1}{4}.....\frac{3}{7}$ d) $-3{,}5.....\frac{35}{10}$

e) $(-10)^0......-(10)^0$ f) $\sqrt{144}.....(-3)^3$ g) $0{,}\hat{3}\ .....\frac{1}{3}$ h) $8{,}5.....\frac{8}{5}$

Actividad Nº8: Resolver aplicando propiedades.

$a)\ a^{-3}.a^4.a^2=$ $b)6^8:6^6=$ $c)\ x^{-8}.x^5.x^3=$

$d)\left(2x^3y^4\right)^2=$ e) $\sqrt{5}\sqrt{20}=$ $f)\sqrt[3]{-24}:\sqrt[3]{-3}=$

$g)\sqrt[3]{-64:8}=$ $h)(6:2)^3=$ $i)(2a^3b^4)^5=$

Actividad Nº9: Indique Verdadero (V) o falso (F), según corresponda. Justifica lo falso.

a) $(4.3)^2=4^2.3^2$ ----

b) $(3-5)^2=3^2-5^2$ ----

c) $\left[(-2)^3\right]^5 = (-2)^8$ ……

d) $3^4 + 3^5 = 3^9$ …..

e) $(-6)^5 : (-6)^5 = -6$ …….

Actividad Nº10: Resuelve los siguientes ejercicios combinados.

$a)(-2)^3 - (-8) : (-2)^2 - (-1)^4 . \sqrt{9+16} =$

$b)(-5)^0 - (4-5)^3 . \sqrt[3]{-125} + \sqrt{2} . \sqrt{8} =$

$c)(4 + \frac{1}{2} + 2{,}7).5 - (0{,}05 - 3{,}15 - 1{,}1) : 2 =$

$d)(2)^2 : (-4) + \sqrt{25 \cdot 4} + (3 \cdot 3 - 5) =$

$e)3^5 : 3^2 + \sqrt[3]{-27 : (-8)} - 2 =$

$f)\sqrt[4]{16 \cdot 81} + (-3)^{12} : (-3)^{10} - (-2)^3 =$

$g)\frac{3}{4} : (-3) + (-2)^{-1} - 4 : \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{16}} =$

$h)\dfrac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{5}\right) . \frac{15}{4} + \frac{2}{9}}{1 - 3\frac{1}{5}} =$

$$i)(3^2-2^2)+(-5).(-5)^2-5.\sqrt{36}=$$

$$j)\frac{\frac{45}{25}.\frac{1}{5}}{\frac{1}{625}-\frac{2}{625}}=$$

Actividad Nº11: Plantear y resolver los siguientes problemas.

a) Cada uno de los 11 empleados de un taller gana mensualmente \$576. Si este mes 3 de ellos recibirán \$88 más por horas extras y dos de ellos tendrán un descuento de \$23 por llegada tarde. ¿Cuánto dinero deberá destinarse para pagar el sueldo?

b) Una caja con una docena de alfajores pesa 600 gramos y cada alfajor pesa 45 gramos. ¿Cuánto pesa la caja?

c) Si por 19 Kg. de café se pagó \$912. ¿Cuánto valen 12 Kg?

d) La suma de tres números es 5676, la suma de los dos primeros es 4729 y el segundo es 3201. ¿Cuáles son los números?

e) El club le paga \$25 por cada partido ganado y \$15 por cada partido empatado. Si recibió hasta ahora \$365. ¿Cuántos partidos empató sabiendo que gano 11 partidos?

Actividad Nº 12: Calculen el valor de las siguientes potencias:

$\boldsymbol{a})\ \left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}=$ $\boldsymbol{b})\ (121)^{-\frac{1}{2}}=$ $\boldsymbol{c})\ (-125)^{\frac{1}{3}}=$

Actividad Nº13: Completar la tabla con los valores que falta:

Expresión con radicales	Expresión con exponentes
$\frac{1}{\sqrt{7}}$	
$\sqrt[3]{5^2}$	

	$16^{\frac{1}{3}}$
	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2}$
$\frac{1}{\sqrt{x^3}}$	

Actividad N°14: Extraer factores del radical:

$a)\ \sqrt{8a^3b^8c^5}$ $\quad b)\ \sqrt[3]{32a^4b^5c^9}$ $\quad c)\ \sqrt[3]{27x^4y^2}$ $\quad d)\ \sqrt{\frac{x^8}{y^6}}$ $\quad e)\sqrt{\frac{18x^4}{2}}$

$f)\ \frac{\sqrt{36x^8}}{\sqrt{81x^4}}$ $\quad g)\sqrt[3]{81p^{-5}m^8r^{12}y^{18}} =$ $\quad h)\ \sqrt[4]{3125p^5m^6n^7}$ $\quad i)\sqrt{\frac{256a^5b^9f^6}{125a^6b^{11}f^4}}$

Actividad N°15: Introducir factores en el radical:

$a)\frac{4x^3y^2}{3}\sqrt{2xy}$ $\quad b)\frac{5x^5y^3z}{2}\sqrt[3]{\frac{xyz}{2}}$ $\quad c)\frac{25x^5yz^3}{7}\sqrt[4]{\frac{x^3y^2z^2}{7}}$

Actividad N°16: Resolver las siguientes sumas algebraicas

$a)\ 5\sqrt{50} - 2\sqrt{18} + 9\sqrt{32} =$ $\quad b)\ 4\sqrt{45} - 2\sqrt{5} + 5\sqrt{125} =$

$c)\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4}{2}} + \frac{3}{2}\sqrt{16} + \frac{1}{4}\sqrt{72} =$ $\quad d)\ 4\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{3} =$

$e)\ x\sqrt[3]{2y} - \sqrt[3]{16x^3y} + 3x\sqrt[3]{54y} =$ $\quad f)\ 2\sqrt{52} + (-4)\sqrt{117} + 120\sqrt{13}$

Actividad Nº17: Racionalización de denominadores.

$a)\frac{3}{\sqrt{6}} =$ $\quad b)\frac{3}{2+\sqrt{7}}$ $\quad c)\frac{2a}{\sqrt{5a}} =$

$d)\ \frac{4+\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2}=$ e) $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}=$ $f)\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}=$

$g)\ \frac{2}{\sqrt[5]{16}}=$ $h)\ \frac{5}{\sqrt[7]{64}}=$ $i)\ \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=$ $j)\ \frac{\sqrt{x}-\sqrt{16x}}{4\sqrt{x}}$

LOGARITMACIÓN

La operación inversa de la potenciación que consiste en calcular el exponente conociendo la potencia y la base se llama **logaritmación**.

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos números reales positivos, siendo $b \neq 1$, existe un único número $\boldsymbol{n}$ tal que:

$$\boldsymbol{b^n = a}$$

El número $\boldsymbol{n}$ se llama logaritmo en base $\boldsymbol{b}$ del número $\boldsymbol{a}$ y se indica:

Definición: $\boldsymbol{\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a}$ $\quad con\ a > 0\ , b > 0\ \wedge\ b \neq 1$

Ejemplos: Hallar los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Propiedades de la logaritmación

1. El logaritmo de 1 en cualquier base es cero

   $\log_b 1 = 0 \ \Leftrightarrow b^0 = 1$

   Ejemplo: $\log_3 1 = 0 \ \Leftrightarrow 3^0 = 1$

2. El logaritmo de la base es 1

   $\log_b b = 1 \ \Leftrightarrow b^1 = b$

   Ejemplo: $\log_5 5 = 1 \ \Leftrightarrow 5^1 = 5$

3. El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores

   $\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c$

Ejemplo: $\log_2(4.2) = \log_2 4 + \log_2 2$

4. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor

$\log_b(a:c) = \log_b a - \log_b c$

Ejemplo: $\log_b(16:4) = \log_2 16 - \log_2 4$

5. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de dicha potencia

$\log_b a^n = n.\log_b a$

Ejemplo: $\log_4 4^5 = 5.\log_4 4 = 5$

6. El logaritmo de una raíz n-ésima es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz

$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$

Ejemplo: $\log_2 \sqrt[4]{16} = \frac{1}{4}\log_2 16$

Logaritmos decimales y logaritmos naturales

Se llaman logaritmos **decimales o de Briggs,** a los logaritmos de base 10

Notación: $\log_{10} a = \log a$

Ejemplo: para indicar el logaritmo decimal de 3, escribimos $\log 3$

Se llaman logaritmos **naturales o neperianos** a los logaritmos de base **e,** donde **e** es el número irracional. Se indica $\log_e a = \ln a$

Ejemplo: para indicar el logaritmo natural de 5, escribimos $\ln 5$

Cambio de base

Conociendo el logaritmo de un número en una base determinada podemos obtener el logaritmo de dicho número en cualquier otra base, aplicando la siguiente fórmula:

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

Ejemplo:

$$\log_4 100 = \frac{\log 100}{\log 4} = 3{,}333\ \ldots$$

Unidad 1: Logaritmo

<u>Actividad 18:</u> Hallar los valores de los siguientes logaritmos:

$a)\ \log_8 64 =$ $\qquad b)\ \log_4 16 =$ $\qquad c)\ \log_{\frac{1}{2}} 4 =$ $\qquad d)\ \log_{\frac{1}{3}} 27 =$

$e)\ \log_{25} \frac{1}{5} =$ $\qquad f)\ \log_{36} 6 =$ $\qquad g)\ \log_3 \sqrt{3} =$ $\qquad h)\ \log_5 \sqrt[3]{5} =$

<u>Actividad Nº19:</u> Aplicar las propiedades de logaritmo:

a) $\log(x \cdot y) =$

b) $\log x - \log y =$

c) $\dfrac{\log x}{4} =$

d) $\log x^3 =$

e) $\log_b b^2 + \log_b b^3 + \log_b 1 =$

f) $\log_b \sqrt[3]{b} - \log_b b^4 =$

<u>Actividad 20:</u> Aplicando las propiedades del logaritmo, calcular:

$a)\ \log_2(16.8) =$ $b)\ \log_3(27:3) =$ $c)\ \log_2 4^3 =$

$d)\ \log_5 \sqrt[3]{25} =$ $e)\ \log_{\sqrt{2}}(4 \cdot \sqrt{2}) =$ $f)\ \log_3 15 + \log_3 5^{-1} =$

Notación Científica

La ***notación científica*** y la ***notación de ingeniería*** permiten representar cantidades muy grandes o muy pequeñas, muy comunes en áreas de la tecnología como la electricidad y electrónica.

La diferencia entre los dos tipos de notaciones está en la representación del exponente.

En el caso de la *notación científica* el exponente puede tener cualquier valor.

En el caso de la *notación de ingeniería* debe ser siempre múltiplo de 3, además de que el factor multiplicativo debe estar entre 1 y 1000.

Para expresar cualquier número en notación científica se escribe el número como producto de las cifras significativas escritas con un dígito diferente de cero a la izquierda de la coma decimal y de una potencia de 10.

Entonces un mol se escribe como $3{,}02 \cdot 10^{23}$ y el radio del electrón como $2{,}82 \cdot 10^{-15}$

Para recordar cómo expresar un número en notación científica se siguen estas pautas

1. Para números mayores que 1: se mueve el coma decimal justo hasta antes del primer dígito para números menores que 1: se mueve el coma decimal justo hasta después del primer dígito distinto de cero
2. se multiplica luego por 10^n si se ha trasladado la coma n lugares hacia la izquierda o por 10^{-n} si se ha trasladado la coma n lugares hacia la derecha

Ejemplo

Para expresar 20.500 en notación científica movemos la coma cuatro lugares hacia la izquierda y multiplicamos por 10^4 de forma que:

$20.500 = 2{,}05 \cdot 10^4$

Para expresar 0,000037 en notación científica movemos la coma cinco lugares hacia la derecha y multiplicamos por 10^{-5} de forma que:

$0{,}000037 = 3{,}7 \cdot 10^{-5}$

Cuando un número se escribe en notación científica se deben incluir los ceros significativos.

Para cambiar un número en notación científica a la notación ordinaria se realiza el proceso inverso, si el exponente de 10 es -n se mueve la coma hacia la izquierda n lugares; si el exponente de 10 es n se mueve la coma hacia la derecha n lugares.

Ejemplo:

$3{,}27.\ 10^{7} = 32.700.000$

$5{,}24.\ 10^{-8} = 0{,}0000000524$

- En la calculadora

Para escribir en notación científica se teclea el numero decimal, luego la tecla EXP, EE o EEX (según sea el modelo de calculadora) y por último el exponente de 10.

Ejemplo:

Para ingresar $6{,}24\ .\ 10^{-4}$ tecleo 6,24 EXP -4

En el display aparecerá $6{,}24^{-4}$ o 6,24E-4, según sea el modelo de calculadora, esto no debe confundirse con la operación de elevar 6,24 a la potencia –4.

Producto y Cociente

El producto o cociente de números muy grandes o muy pequeños se simplifica al usar notación científica.

Ejemplo:

El producto de 87.000.000 x 470.000.000.000 puede simplificarse con la notación científica, hacemos

87.000.000 x 470.000.000.000 $= 8{,}7\ .\ 10^{7} \times 4{,}7\ .\ 10^{11}$

$= (8{,}7 \times 4{,}7) \times (10^{7} \times 10^{11})$

$= 40{,}89\ .\ 10^{7+11}$

$= 40{,}89\ .\ 10^{18}$

$= \mathbf{4{,}089\ .\ 10^{19}}$

100.000.000 x 0,0000024 $= 1.\ 10^{8} \times 2{,}4\ .\ 10^{-6}$

$= (1 \times 2{,}4) \times (10^{8} \times 10^{-6})$

$= 2{,}4\ .\ 10^{8-6}$

$= \mathbf{2{,}4\ .\ 10^{2}}$

Unidad 1 - Notación Científica

Actividad Nº21: Escribe los números en notación científica:

a) 42.000 =

b) 370.000.000 =

c) 0,000038 =

d) 152.000 =

e) 124.000 =

f) 0,0012 =

g) 0,002 =

h) 123.000 =

Actividad Nº22: Efectuar las siguientes multiplicaciones y divisiones en notación científica:

a) 0.025 x 0.345 =

b) 0,00045 x 1500 =

c) $4,5 \cdot 10^{-4}$ x $3.5 \cdot 10^{5}$ =

d) $4 \cdot 10^{4} : 2 \cdot 10^{-2}$ =

e) $5,4 \cdot 10^{6} : 2.7 \cdot 10^{-3}$ =

f) $84 \cdot 10^{-9} : 42 \cdot 10^{4}$ =

Actividad Nº23: El área de la base de un tanque circular es de 0,000876 m^2. ¿Cuál es el diámetro de la base del tanque expresado en notación científica?

PERÍMETRO – ÁREA – VOLUMEN – DENSIDAD – PORCENTAJE

El **perímetro** es la **suma de las longitudes de todos los lados de una figura.**

El **área** nos da una idea de cuánta superficie cubre dicha figura.

El conocimiento del área y el perímetro lo aplican muchas personas día con día, como los arquitectos, ingenieros, y diseñadores gráficos, y es muy útil también para la gente en general. Entender cuánto espacio tienes o cuando pintas tu cuarto, compras una casa, remodelar la cocina, o construyes un escritorio.

El **volumen** corresponde al **espacio que la forma ocupa**, por lo tanto, es la **multiplicación de la altura por el ancho y por el largo**. El volumen sirve, por ejemplo, cuando queremos calcular la cantidad de agua en una piscina.

La **densidad** (δ) es la relación razón entre masa (m) y volumen (v) de una sustancia

$$\delta = m/v$$

El concepto de densidad es de mucha importancia en el campo de la física y de la química.

Las unidades de densidad en el sistema internacional más usado es el (kg/m^3), aunque también se puede expresar en (gr/cm^3). Para gases suele usarse el (gr/dm^3) o el (gr/lt).

La densidad es una cantidad intensiva ya que no varía con la cantidad de sustancia, por ejemplo, la densidad del agua es de 1 Kg/m^3.

Si se tiene 100 kg o 10000 Kg de agua el valor de la densidad es el mismo, ya que al aumentar la masa también aumenta el volumen.

La densidad también es un nexo importante para transformar masa a volumen o viceversa.

Ejemplo: ¿Qué volumen necesitamos para tener 30 grs de ácido sulfúrico si su densidad es de 1,84 gr/cm^3

$\delta = \frac{m}{v}$ si despejamos volumen (v)

$$v = \frac{m}{\delta}$$

Reemplazamos los valores de densidad y de volumen:

$$v = \frac{30\ gr}{1{,}84\ gr/cm^3} = \mathbf{16{,}30\ cm^3}$$

Lo mismo ocurre si se pretende calcular la masa, por ejemplo, la densidad del aluminio es de 2,7 gr/cm ^{3} y el volumen es de 225,18 cm^3

$$m = v.\delta$$

Reemplazamos con los valores de la densidad y el volumen:

$$m = 2{,}7\frac{gr}{cm^3}\ .225{,}18\ cm^3 = \mathbf{608\ gr}$$

Unidad 1 - Perímetro, Área, Volumen

<u>Actividad Nº24:</u> Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) La densidad del etanol es de 0.798 g/mL. Calcular la masa de 17.4 mL del líquido.

b) Si la densidad de un alcohol es 0.8 g/cm^3. Calcular el volumen de 1600 g de alcohol.

c) Calcula la densidad de un cuerpo que tiene de volumen 2 cm^3 y una masa de 25 g.

d) Calcula el volumen de un cubo macizo de 10 cm de lado cuya densidad es de 234 g/cm^3.

e) En un laboratorio de suelos, se toma una muestra de fertilizante granulado utilizada en un cultivo de maíz. La muestra tiene una masa de 1,8 kg y ocupa un volumen de 1,5 litros.
Calcule la densidad del fertilizante en Kg/L.

f) Un ingeniero agrónomo necesita calcular la masa de agua almacenada en un tanque para riego por goteo. Sabiendo que el tanque contiene 2,5 m^3 de agua. Y que la densidad del agua es aproximadamente 1000 kg/m^3, halle la masa de agua contenida en el tanque.

Porcentaje

Los porcentajes son una forma de presentar información numérica. Se utilizan en muchas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo: los negocios los utilizan para informar el descuento que tendrá un determinado producto, en la preparación de mezclas de ciertas sustancias, etc. Los diarios están llenos de estadísticas presentadas en forma porcentual.

Un porcentaje es el número de partes que se toman de un todo que se ha dividido en 100 partes iguales.

El 1% de un todo es su centésima parte, es decir cada una de las partes que se obtienen al dividir el todo en 100 partes iguales.

Ejemplo: Si en 90 L de una solución hay un 1% de ácido ¿cuántos litros de ácido hay?

Debemos calcular el 2 % de 90 L

$$2\%\ de\ un\ todo = \frac{al\ todo}{100}$$

$$2\%\ de\ 90\ L = \frac{90}{100} = 0.9 \text{ l.}$$

Ejemplo

Para calcular el a % de una cantidad x podemos multiplicar el porcentaje por la cantidad y luego correr la coma decimal dos lugares hacia la izquierda (lo que es equivalente a dividir por 100)

- Para calcular el 5% de 120 hacemos 120 x 5=600 y luego corremos la coma dos lugares hacia la izquierda. Es decir el 5% de 120 es 6.
- Para calcular el 20% de 120 podríamos multiplicar 120 por 20 y luego correr la coma dos lugares, pero más fácil es multiplicar 120 por 2 y correr la coma un solo lugar: 120 x 2=240. Corriendo la coma un lugar obtenemos que el 20% de 120 es 24.

Unidad 1 - Porcentaje

Actividad Nº25: Calcular los siguientes porcentajes

a) ¿Cuánto es el 11% de 3500?

b) Las máquinas de un establecimiento que se adquirieron por $2400, sufren una depreciación del 4% anual. ¿Cuánto valdrán el segundo año?

c) El primer y segundo vencimiento de una factura de gas es de $225 y $252 respectivamente. ¿Cuál fue el % de aumento?

d) En una prueba de germinación de semillas de trigo, se sembraron 100 semillas.
Después de varios días, 85 semillas germinaron.

1) Calcule el porcentaje de semillas germinadas.

2) ¿Cuántas semillas no germinaron?

Actividad Nº26: Calcular los siguientes porcentajes usando calculadora sí:

a) 36% de 125 =

b) 15% de 280 =

c) 8% de 400 =

Actividad Nº28: Resolver las siguientes situaciones problemáticas

a) Un campo rectangular tiene 2,08 hm de largo y 15,6 dam de ancho. ¿Cuántos metros de alambre se necesitarán para cercarlo sabiendo que se ponen tres hileras de alambre?

b) Cuando se coloca en un recipiente de 3 dm^3, 10 cl y ½ l de agua, el recipiente se llena 2/3 de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad total?

c) ¿Cuál es la longitud del piolín necesario para atar una caja de 0,60m de largo, 40 cm de ancho y 35 cm de alto, contando además 0,15m para el nudo?

d) Calcula el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que tiene 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2500 mm de alto.

e) Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1.5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de $ 6 el metro cuadrado.

1) Cuánto costará pintarla.

2) Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla.

f) ¿Cuántas losetas cuadradas de 20 cm de lado se necesitan para recubrir las caras de una piscina de 10 m de largo por 6 m de ancho y de 3 m de profundidad?

g) En un almacén de dimensiones 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas de dimensiones 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¿Cuantas cajas podremos almacenar?

h) Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 potes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.

i) Un cilindro tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base. Y la altura mide 125.66 cm.

Calcular:

1) El área total

2) El volumen.

j) Calcula el área lateral, total y el volumen de una pirámide cuadrangular de 10 cm de arista básica y 12 cm de altura.

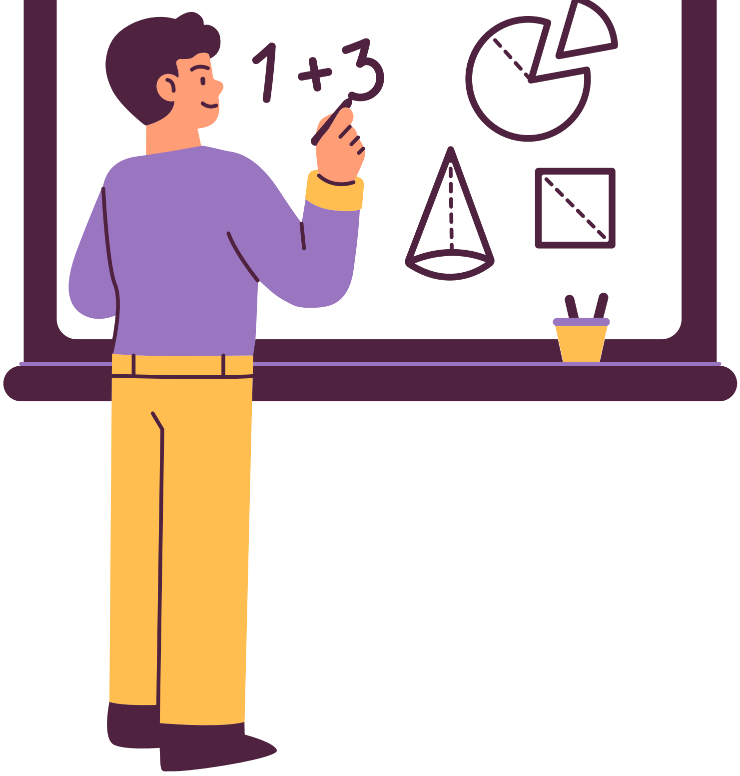
k) Para una fiesta, Luís ha hecho 10 gorros de forma cónica con cartón. ¿Cuánto cartón habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de generatriz?

AUTOEVALUACIÓN

Accede al siguiente código para realizar la autoevaluación de la unidad 1.

Autoevaluación Unidad 1

UNIDAD 2



ECUACIONES

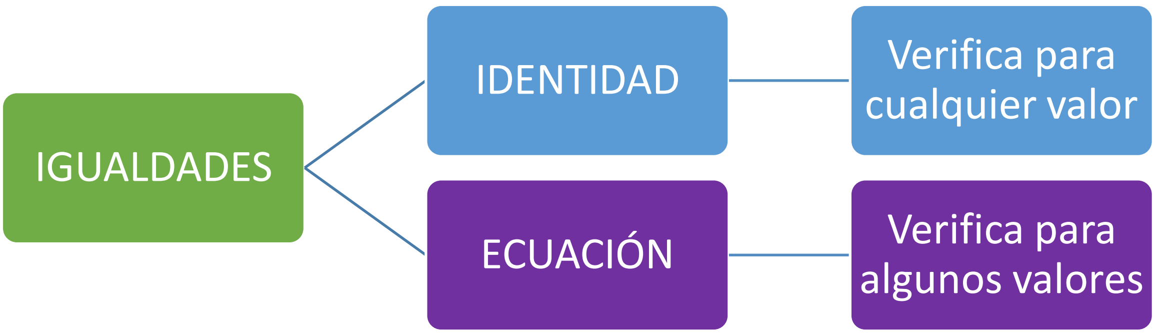
UNIDAD Nº2

ECUACIONES

Ecuaciones

La posibilidad de resolver un problema a menudo depende de la posibilidad de escribir una ecuación para el problema y luego resolver la ecuación. A continuación, veremos cómo se resuelve una ecuación.

Ciertas ecuaciones son verdaderas para todos los valores de sus variables. Estas ecuaciones se llaman identidades.



Una ***identidad*** es una igualdad algebraica que se verifica para todos los valores asignados a las variables.

Ejemplo: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ si a =2 y b = 1

$$(2-1)(2+1)=2^2-1^2$$

$$(1)(3)=4-1$$

$$3=3$$

Una ***ecuación*** es una igualdad que involucran determinados valores y determinadas incógnitas. Resolver una ecuación es preguntarse para qué valores de la variable se verifica dicha igualdad. Ese valor obtenido se llama solución o ***raíz de la ecuación***.

Para resolver una ecuación, transformamos la ecuación original en otra más simple.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones ***son equivalentes*** si tienen exactamente el mismo ***conjunto solución*** (es decir las mismas raíces).

Para pasar de una ecuación a una ecuación equivalente vamos a efectuar las siguientes operaciones:

1. Si a ambos miembros de una ecuación se suma o resta un mismo número o la misma expresión algebraica se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

$$A = B \Leftrightarrow A + c = B + c$$

2. Si a ambos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un mismo número, distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente a la dada. (Recuerde que no puede dividir por cero, es decir la expresión algebraica tiene que ser distinta de cero).

$$A = B \Leftrightarrow A.c = B.c \qquad c \neq 0$$

3. Agrupe los términos semejantes en cualquier miembro de la ecuación.
4. Intercambie los dos términos de la ecuación. De modo que la variable siempre quede a la izquierda.

Para resolver una ecuación generalmente tenemos que emplear una combinación de estas operaciones. A veces hay que utilizar la misma operación más de una vez

Ejemplo: $x - 9 = 10$

$x - 9 + 9 = 10 + 9$ (Sume 9 en ambos miembros)

$x = 19$

Si reemplazo en la ecuación original el valor de x = 19, debe verificar la ecuación.

19 - 9 =10

Ejemplo: $3x = -15$

$$\frac{1}{3}.(3x) = \frac{1}{3}.(-15)$$ Multiplique ambos miembros por $\frac{1}{3}$

X = - 5 el recíproco de 3

Si reemplazo en la ecuación original, se observa que verifica.

Ejemplo: $3x + 27 = 6x$

3x + 27 – 3x = 6x – 3x Reste en ambos miembros 3x

27 = 3x Intercambie los dos miembros de la ecuación

3 x = 27

$\frac{1}{3}$ (3 x) = $\frac{1}{3}$ (27) Multiplique por $\frac{1}{3}$

x = 9

Una ecuación de ***primer grado lineal*** es aquella cuya forma general es:

ax + b = 0

A continuación veremos un par de ejemplos de resolución de ecuaciones de primer grado:

Ejemplo:

a) $$-3.\left(2x-\frac{5}{6}\right)=\left(-\frac{5}{4}x+3\right):\frac{1}{2}$$

$$-6x+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}x+6$$

$$-6x+\frac{5}{2}x=-\frac{5}{2}+6$$

$$-\frac{7}{2}x=\frac{7}{2}$$

$$x=-1$$

b) $$2x-3+3\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}\right)=x-\frac{5}{4}(x-1)$$

$$2x-3+2x-\frac{1}{2}=x-\frac{5}{4}x+\frac{5}{4}$$

$$4x+\frac{1}{4}x=\frac{5}{4}+\frac{7}{2}$$

$$\frac{17}{4}x=\frac{19}{4}$$

$$x = \frac{19}{17}$$

La habilidad de resolver ecuaciones es útil sólo si somos capaces de captar un problema y escribirlo en la forma de una o más ecuaciones. La mayoría de los problemas que tenemos que resolver en el trabajo son problemas verbales. Alguien nos dirá acerca de un problema que quiere que resolvamos y escribirá parte o todo el problema. Primero tenderemos que captar ese problema verbal y organizarlo de modo que sea fácil entender, luego veremos cual es el problema y decidiremos cual información es importante y cuál no. Una vez entendido plantearemos la ecuación. Una vez que hayamos escrito la o las ecuaciones, la parte más difícil habrá quedado atrás. Todo lo que resta es resolver las ecuaciones y comprobar los resultados.

Sugerencias para resolver problemas:

1. Lea con cuidado el problema. Asegúrese de entender lo que pide el problema. Puede ser necesario leer el problema varias veces para entenderlo perfectamente.
2. Identifique claramente las cantidades desconocidas. Identifique cada cantidad desconocida con una variable. Anote lo que quiere decir cada letra. Anote lo que quiere decir cada letra. Por ejemplo podría usar e para espacio o t para tiempo.
3. De ser posible represente todas las incógnitas en términos de una sola variable.
4. Haga un esquema o dibujo si ello le aclara el problema.
5. Analice con cuidado el problema. Trate de escribir ecuación que muestre cómo se relacionan todas las cantidades conocidas y desconocidas. Si no es posible escribir una sola ecuación, use más.
6. Resuelva la ecuación y compruebe el resultado con el problema original.

A continuación veremos como resolver algunas situaciones problemáticas.

Ejemplo: Si un aeroplano vuela a 785 Km/h durante 4,5 h, ¿qué tan lejos llegará?

Usamos la fórmula de e = v . t . Nos da la velocidad y el tiempo así que solo tenemos que reemplazar en la ecuación

e = v. t

e = 785 Km/h . 4,5 h

e = 3532,5 KM

UNIDAD 2 - Ecuaciones

INECUACIONES

Se llama ***inecuación*** a toda desigualdad algebraica que solamente se satisface para ciertos valores de sus incógnitas.

Trabajaremos con inecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolver una inecuación es encontrar todos los valores de la incógnita que la verifican, y el conjunto solución es un intervalo real o vacío.

Una inecuación se resuelve como una ecuación, salvo en el caso en que se divida o multiplique a ambos miembros por un mismo número negativo, se obtiene otra desigualdad de sentido contrario a la dada.

Reglas para resolver una inecuación

1. Si se suma o resta el mismo número a ambos lados de la desigualdad se obtiene una desigualdad equivalente

   $$A < B \Leftrightarrow A + c < B + c$$

2. Si se multiplica o divide a ambos lados de una desigualdad por un mismo número positivo, se obtiene una desigualdad equivalente.

   $$A \geq B \Leftrightarrow A.c \geq B.c \quad \text{si } C > 0$$

3. Si se multiplica o divide a ambos lados de una desigualdad por un mismo número negativo, se **invierte la desigualdad**.

   $$A \geq B \Leftrightarrow A.c \leq B.c \quad \text{si } C < 0$$

UNIDAD 2 - Inecuaciones

Ejemplos:

a) $6x < 8x + 2$

$6x - 8x < 8x - 8x + 2$

$-2x < 2$

$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) < 2.\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x > -1$. El conjunto solución es (-1, +∞)

b) 4 x > 8

$\frac{1}{4}.4x < 2.\frac{1}{4}$

$x < \frac{1}{2}$. el conjunto solución es (- ∞ ; $\frac{1}{2}$)

<u>Actividad Nº 1:</u> Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $(-5-2x)(3x-7)+(3x-5)(2x-7)+30=5x$

b) $\frac{9-7x}{20}=\frac{13-5x}{11}$

c) $\frac{25x-17}{11}=\frac{17x-15}{7}$

d) $\frac{3}{4}-\frac{2-3x}{3}+\frac{x}{2}=x-\frac{5}{10}$

e) $1-\frac{8-7x}{5}=-\frac{14}{5}x$

f) $4+\frac{4-4x}{5x}=0$

g) $\frac{2-x}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{5+4x}{2x}$

h) $2+\frac{6-10x}{3x}+\frac{5}{6}=0$

i) $\frac{4x-4}{8x}+\frac{3}{2x}=\frac{2x+6}{8x}+\frac{1}{2x}$

j) $\frac{2x+3}{2x+5}=\frac{5x+4}{5x+2}$

k) $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-1}=0$

l) $\frac{3}{x}+\frac{4}{x}=3$

Actividad Nº 2: Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) ¿Cuál es el número cuya tercera parte sumada a su quinta parte es igual a 40?

b) ¿Qué número ha de restarse $\frac{6}{5}$ para que la diferencia sea igual a su quinta parte?

c) Un jardín rectangular tiene 25 pies de ancho. Si su área es de 1125 pies cuadrados, ¿cuál es su largo?

d) La suma de tres números enteros consecutivos es 48 ¿cuánto vale cada número?

e) De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y queda aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

f) A un niño le preguntan la edad de su padre y contesta: si al doble de mi edad se le suman 6 veces mi misma edad y a la mitad de esa suma se le quita 18, resulta la edad de mi padre. El niño tiene ahora 15 años, ¿cuántos años tiene el padre?

g) En un rectángulo de 68 cm de perímetro, la base es 5 cm mayor que la altura. ¿Cuál es la longitud de la altura?.

h) La suma de un número entero y su siguiente es 53. ¿Cuál es el número?

i) La edad de la nieta es un tercio de la edad de la abuela y la diferencia de edades es 48. ¿Cuántos años tiene la abuela?.

j) Un camión cisterna descargó 1 / 3 de su contenido en la primera estación, 1/5 de lo que quedaba en la segunda y los 16 litros restantes en la tercera. ¿Cuál es el contenido del camión?

k) Partí el número 40 en dos sumandos de manera que si el mayor se divide por el menor se obtiene de cociente 2 y resto 1.

l) En un triángulo isósceles de 42, 5 cm de perímetro, el lado desigual es la mitad de los lados iguales. ¿Qué longitud tiene cada lado del triángulo?

m) Si al cuádruple de un número se le suma 2 se obtiene la diferencia entre su mitad y 5. ¿Cuál es el número?

n) Las entradas para un recital se venden con varios días de anticipación. El primer día se vende la mitad, el segundo el 60 % de lo que queda y el tercero el 40 % del sobrante. Quedan aún 384 entradas. ¿Cuántas entradas se pusieron en venta?

Actividad Nº 3: Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2x-5 > -10$

b) $5x - 2 > 3x + 8$

c) $6 - x < 9$

d) $-9x + 3x \geq -24$

e) $5x + 2 \leq 3x + 9$

f) $2x - 7 \geq 15x - 8$

Actividad Nº 4: Resuelve las siguientes situaciones problemáticas:

a) ¿Cuáles son los números que aumentado en 7 unidades son menores que el doble de 5?.

b) La edad de Juan es un múltiplo de 5 menor que 80 y mayor que 50. ¡¿Cuántos años puede tener Juan?

c) Para un trabajo se pide que los postulantes tengan más que la mitad de la edad del jefe, que tiene 44 años, pero menos de 35. ¿Cuáles son las edades posibles de los postulantes?

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Ecuaciones Exponenciales

Una ecuación en la que la variable aparece en un exponente, se denomina ***ecuación exponencial***

Para resolver una **ecuación exponencial hay que recordar las siguientes propiedades de potencia**

- $a > 0$ $\quad a^0 = 1$ $\quad a^1 = a$

- $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{n}$ $\qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

UNIDAD 2 - Ecuaciones Exponenciales

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación exponencial

a) $2^{2x-1} = 4$

$2^{2x-1} = 2^2$

$2x - 1 = 2$

$2x = 2 + 1$

$x = \dfrac{3}{2}$

b) $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$

$3^{1-x^2} = \dfrac{1}{3^3}$

$3^{1-x^2} = 3^{-3}$

$1 - x^2 = -3$

$x^2 = 4$ $x^2 = \pm 2$

Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en la que la incógnita aparece afectada por un logaritmo y las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita aparece como potencia.

Para resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales se deben recordar las propiedades de los logaritmos vistas en la unidad 1

Ejemplo de ecuaciones logarítmicas

a) $2^x = 16$ aplicando propiedades de logaritmo

$x \log_2 2 = \log_2 16$

$x.1 = 4$

$x = 4$

b) $5.2^x + 2^{x+2} = 18$ $2^{x+2} = 2^x .2^2$

$5.2^x + 2^x.2^2 = 18$ Se saca factor común 2^z

$2^x(5 + 2^2) = 18$

$2^x.9 = 18$

$2^x = \dfrac{18}{9}$

$2^x = 2$

x = 1

c) $3.2^{2x} - 6.2^x + 3 = 0$ Hacemos un cambio de variable llamamos a $z = 2^x$

$2^{2x} = (2^x)^2$

$3.z^2 - 6.z + 3 = 0$ Resolviendo la ecuación de segundo grado, se tiene $z_1 = z_2 = 1$

Recordemos que $z = 2^x \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

d) $\log_5(x-2) = 0$ aplicando la definición de logaritmo queda

$5^0 = x - 2 \Rightarrow 1 = x - 2 \Rightarrow 1 + 2 = x$

$x = 3$

e) $\log_4^2 x + 3\log_4 x + 2 = 0$ Hacemos cambio de variable llamamos $\log_4 x = z$

$\log_4^2 x = z^2$

$z^2 + 3.z + 2 = 0$ Resolviendo la ecuación de segundo grado resulta z_1 = -1 y z_2 = -2

$$\log_4 x = -1 \Rightarrow 4^{-1} = x \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\log_4 x = -2 \Rightarrow 4^{-2} = x \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

f) $\log_{\sqrt{6}}(x+5) = 2 - \log_{\sqrt{6}} x$

$$\log_{\sqrt{6}}(x+5) + \log_{\sqrt{6}} x = 2$$

$\log_{\sqrt{6}}[(x+5).x] = 2$ Aplicando la definición de logaritmo

$\left(\sqrt{6}\right)^2 = x^2 + 5x$ o sea $6 = x^2 + 5x$

$x^2 + 5x - 6 = 0$ Resolviendo queda x_1 = 1 y x_2 = 6

Cuando se verifican las soluciones vemos que para x = -6 , este valor carece de sentido pues el logaritmo ha sido definido solo para ***números positivos***.

UNIDAD 2 - Ecuaciones Logarítmicas

Actividad Nº 5: **I-** Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $3^{5x+2} = 243$

b) $16^{5-x} = 4$

c) $8^{x-2} - 0{,}125 = 0$

d) $8^{2x} : 2^{9x} = \frac{1}{64}$

e) $10^{x-2} + 10^{x-4} + 10^{x} = 10101$

II- Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas.

f) $\log_{12}(4x+2)=0$

g) $\log_2 8x+\log_2 4x^2 =8$

h) $\log_5(x+12)-\log_5(x+2)=1$

i) $\log(x-3)+\log x=\log 4$

j) $\log(x-8)+\log(x-2)=\log(8-x)$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado tiene la siguiente expresión: a x^2 + b x + c = 0, siendo a, y c números reales y a $\neq$ 0,

a x^2 + **b** x + **c = 0**

Término cuadrático Término lineal Término independiente

Cálculo de las raíces de una ecuación de segundo grado

A continuación analizaremos distintas situaciones para resolver una ecuación cuadrática

1. Si la ecuación es de la forma: $x^2 =c \Rightarrow x=\pm\sqrt{c}$

Ejemplo:

a. $x^2 =5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

b. $(x-3)^2 =2$

$x-3=\pm\sqrt{2}$

$x=3\pm\sqrt{2}$

Las soluciones son: $x=3+\sqrt{2}$ y $x=3-\sqrt{2}$

2. Si la ecuación es de la forma $ax^2+bx+c=0$, para que sea un cuadrado perfecto se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de **x** en ambos miembros $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Ejemplo 1:

$x^2-4x-5=0$ $x^2-4x=5$ $x^2-4x+4=5+4$	Ecuación dada Se suma 5 en ambos miembros Se completa cuadrados $\left(\frac{-4}{2}\right)^2=(-2)^2=4$
$(x-2)^2=9$ $x-2=\pm\sqrt{9}$ $x=2\pm3$ $\Rightarrow x_1=2+3\Rightarrow x_1=5$ $\Rightarrow x_2=2-3\Rightarrow x_2=-1$	Cuadrado perfecto Obtención de la raíz cuadrada Obtener el valor de las raíces

Ejemplo 2:

$x^2-12x+6=0$ $3x^2-12x=-6$ $3\left(x^2-4x\right)=-6$ $3\left(x^2-4x+4\right)=-6+3.4$	Ecuación dada Se resta 6 en ambos miembros Se completa cuadrados $\left(\frac{-4}{2}\right)^2=(-2)^2=4$ Se suma cuatro en ambos miembros

$3(x-2)^2=6$ $(x-2)^2=6:3$ $x-2=\pm\sqrt{2}$ $x=2\pm\sqrt{2}$	Cuadrado perfecto Obtención de la raíz cuadrada Obtener el valor de las raíces

La fórmula cuadrática

Cuando la ecuación cuadrática **a** x^2 + **b** x + **c = 0** a≠0

Para calcular las raíces de la ecuación aplicamos el siguiente procedimiento:

a x^2 + **b** x + **c = 0** $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \Rightarrow$ $a=0 \quad \vee \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$	Factorizamos *a* para que x^2 quede sola. Es un producto, por lo tanto, tenemos dos opciones: *a* = 0 ó el polinomio es igual a cero, para nuestro propósito nos quedamos con el polinomio.
$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$ = 0	Sumamos y restamos "lo mismo" para mantener la igualdad. Como queremos obtener un binomio al cuadrado, completamos cuadrados.
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$	Trinomio cuadrado perfecto: $(x + y)^2 = x^2 + 2\,x\,y + y^2$. Operamos y despejamos el binomio al cuadrado. Recordar que al resolver la raíz de un binomio al cuadrado queda el módulo de este.
$\left\lvert x+\frac{b}{2a}\right\rvert=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	Al sacar el módulo el resultado puede quedar positivo o negativo (para ahorrar espacio se ponen los dos signos juntos "$\pm$".Lo único que queda es despejar la "*x*" Esta ecuación se denomina "ecuación cuadrática" y será aplicada de aquí en más para hallar las raíces de la ecuación de segundo grado.

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Calcular las raíces de la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$

a = 1 , b = 2 y c = -3, reemplazamos en la ecuación:

$$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1.(-3)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\frac{-2+4}{2}\Rightarrow x_1=1 \\ x_2=\frac{-2-4}{2}\Rightarrow x_2=-3\end{cases}$$

UNIDAD 2 - Ecuación Cuadrática

Cálculo de discriminante

Al radicando **$b^2 - 4ac$**, se lo denomina **discriminante,** ya que el valor del mismo sirve para determinan la naturaleza de las raíces y se lo simboliza con la letra griega delta Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

De acuerdo al valor que tome Δ podemos decir como son las raíces

Si $\Delta > 0$ entonces las raíces son ***reales y distintas.***

Si $\Delta = 0$ entonces las raíces son ***reales e iguales***

Si $\Delta < 0$ entonces las raíces son ***complejas conjugadas***

A continuación veremos cada uno de las situaciones planteadas.

$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
$x^2 - 5x + 6 = 0$ $\Delta = (-5)^2 - 4.1.6$ $\Delta = 25 - 24$ $\Delta = 1$ Las raíces son reales y distintas	$x^2 - 2x + 5 = 0$ $\Delta = (-2)^2 - 4.1.5$ $\Delta = 4 - 20$ $\Delta = -16$ Las raíces son complejas conjugadas	$9x^2 + 6x + 1 = 0$ $\Delta = (6)^2 - 4.9.1$ $\Delta = 36 - 36$ $\Delta = 0$ La raíces son reales e iguales.

UNIDAD 2 - Discriminante

Propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática

Si una ecuación de segundo grado tiene:

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$

Las raíces se puede escribir factorizada como:

$$a.(x - x_1).(x - x_2) = 0$$

Aplicamos propiedad distributiva

$$ax^2 - ax.x_2 - a_1 x + ax_1 x_2 = 0$$

$$ax^2 - a(x_1 + x_2).x + ax_1 x_2 = 0$$

Para que esta ecuación sea igual que (1), hace falta que se cumpla:

$$b = -a(x_1 + x_2)$$

$$c = ax_1.x_2$$

Entonces llegamos que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

A continuación veremos un ejemplo:

Ejemplo: Reconstruir la ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

$x_1 = -\frac{2}{3}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=-\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{5}{6}=-\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{a}=-\frac{5}{6} \\ -\frac{2}{3}.\frac{3}{2}=\frac{c}{a}\Rightarrow-\frac{6}{6}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{a}=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow x^2-\frac{5}{6}x-1=0$$

UNIDAD 2 - Ecuaciones de Segundo Grado

Actividad Nº 6: Calcular las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 - 8x + 6 = 0$ b) $-x^2 + 2x + 3 = 0$

c) $x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{1}{2} = 0$ d) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{12} = 0$

e) $x^2 + 11x = 0$ f) $5x^2 - 30x = 0$

Actividad Nº 7: Analizar el discriminante y determinar el tipo de solución que tienen las ecuaciones:

a) $x^2 + 7x - 4 = 0$ b) $x^2 - 2x + 6 = 0$

c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ d) $3x^2 + 7 = 0$

e) $3x^2 + 6x + 15 = 0$ f) $4x^2 - 16x - 48 = 0$

Actividad Nº 8: Calcular el o los valores de K para los cuales las siguientes ecuaciones tienen dos raíces reales e iguales y escriban su fórmula:

a) $x^2 + 2kx + k = 0$ b) $x^2 + (k-1).x - k = 0$

c) $2x^2 - x - k = 0$

Actividad Nº 9: Reconstruir las siguientes ecuaciones de segundo grado conociendo las raíces:

a) $x_1 = \frac{2}{3}$ y $x_2 = \frac{5}{9}$ b) $x_1 = 0$ y $x_2 = -\frac{7}{2}$ c) $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Actividad Nº 10 : Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) Descomponer el número 9 en dos números positivos tales que el triplo del cuadrado de uno de ellos supere al séxtuplo del otro en 18 unidades.

b) Calcular la diagonal de un rectángulo sabiendo que la base es igual a las tres cuartas partes de la altura y el área es de 48 cm^2.

c) El área y el perímetro de un rectángulo son respectivamente 189 cm y 57 cm. ¿Calcular la longitud de su diagonal?.

ECUACIÓN LINEAL

Una recta en el plano, se puede representar algebraicamente mediante una ecuación de la forma

$$a\,x + by = 0$$

Una ecuación de este tipo se conoce como **ecuación lineal** en las variables **x** e **y.**

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales formado por dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una, representan dos rectas en el plano, y resolverlo es hallar la intersección de ambas es decir el conjunto solución.

Consideramos el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Donde a_1 , a_2 ,b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , son números dados.

Un sistema puede ser compatible o incompatible. De ser compatible puede tener solución única o infinidad de soluciones, o incompatible no tiene solución, en este caso las rectas son paralelas

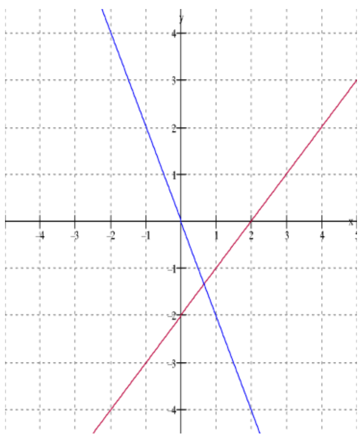
$$\text{Solución del Sistema} \begin{cases} \mathit{Compatible} \begin{cases} \text{Determinado} \quad \text{Solución Única} \\ \text{Indeterminado} \quad \text{Infinitas Soluciones} \end{cases} \\ \mathit{Incompatible} \ \text{No tiene Solución} \end{cases}$$

A continuación veremos algunos ejemplos de cómo serían las gráficas en cada uno de los casos.

Sistema compatible

Determinado ***Solución Única***

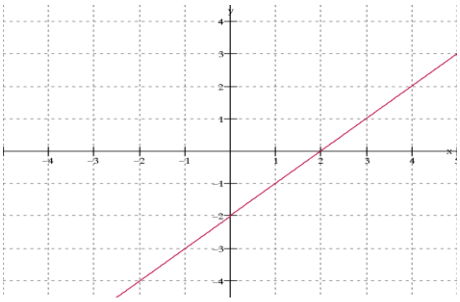
Las rectas se cortan en un punto



Sistema Compatible Indeterminado

Infinitas soluciones

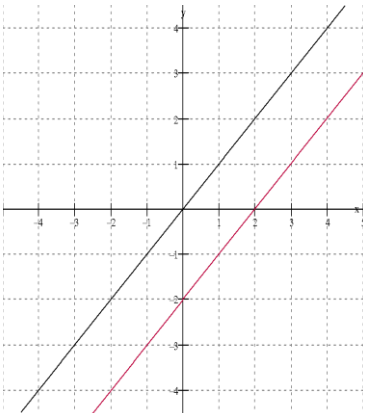
Las recta son coincidentes



Sistema Incompatible

No tiene Solución

Las rectas son paralelas



Para resolver analíticamente un sistema de ecuaciones existen varios métodos. Todos ellos permiten obtener el mismo resultado, y la utilización de uno u otro dependerá de cómo esté planteado el sistema original.

Los métodos analíticos que han visto en la escuela secundaria son:

Método de Sustitución

Método de Igualación

Método de Reducción o de Suma y Resta

Método de Determinantes o Regla de Cramer

A continuación desarrollaremos cada uno de ellos para que ustedes lo recuerden, pero en este curso veremos como se trabaja cuando tenemos un sistema de mas de dos ecuaciones y para ello aplicaremos un nuevo método que es el de eliminación Gaussiana.

Método de Sustitución

Se debe despejar una de las variables en una de las ecuaciones, y luego reemplazarla en la otra ecuación

Regla:

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones del sistema
2. Se sustituye en la otra ecuación la misma incógnita por la expresión hallada, para obtener una ecuación de primer grado con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación resultante, para determinar el valor de su incógnita.
4. Se reemplaza el valor hallado, en la expresión de la incógnita despejada en el primer paso, para obtener el valor de dicha incógnita.

5. Se verifica si el par de valores hallado es la raíz del sistema.

   Observación: El método se basa en que la sustitución de las incógnitas se efectúa para un mismo valor en ambas ecuaciones, es decir, para el par de valores que satisface el sistema.

   Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 & \text{a} \\ 3x - y = 2 & \text{b} \end{cases}$$

Se despeja x de la ecuación **a** : x = 2 - y

Se reemplaza la " x " por " 2 – y" en la ecuación **b** : 3 (2 – y) – y = 2

Se resuelve la ecuación, obteniendo el valor de " y" :

6 – 3 y – y = 2 $\Rightarrow$ **-** 4 y = 2 – 6 $\Rightarrow$ -4 y = - 4 $\Rightarrow$ y = -4 : (- 4) $\Rightarrow$ **y = 1**

Con el valor obtenido de "y", se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones y se calcula el valor de " x "

x = 2 -1 $\Rightarrow$ **x = 1**

El conjunto solución del sistema se escribe como **(x,y) = (1,1)**

Método de Igualación

Para aplicar este método se despeja la misma incógnita de ambas ecuaciones y luego se igualan.

El método de igualación puede resumirse en la siguiente

Regla:

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones del sistema.
2. Se igualan los segundos miembros de las igualdades obtenidas para formar una ecuación de primer grado con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación resultante para determinar el valor de su incógnita.
4. Se procede de igual modo con respecto a la otra incógnita.
5. Se verifica si el par de valores hallado es solución del sistema.

Observación: El método de igualación se funda en que se igualan las incógnitas suponiendo que representan los valores de la raíz del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 & \text{a} \\ 2x - y = 3 & \text{b} \end{cases}$$

Se despeja "x" de ambas ecuaciones

(a) : 3 x = 2 y + 4 $\Rightarrow$ $x = \dfrac{2y+4}{3}$ (b) 2 x = y + 3 $\Rightarrow$ $x = \dfrac{y+3}{2}$

Se igualan las ecuaciones (a) y (b) y se calcula el valor de "y"

$\frac{2y+4}{3} = \frac{y+3}{2} \Rightarrow 2.(2y+4) = 3.(y+3) \Rightarrow 4y+8 = 3y+9 \Rightarrow$ 4y -3y = 9 -8 $\Rightarrow$ **y = 1**

Se reemplaza el valor de "y" obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el valor de "x"

Reemplazando el valor de "y" en la ecuación (a) queda

$x = \frac{2.1+4}{3} \Rightarrow x = \frac{2+4}{3} \Rightarrow x = \frac{6}{3} \Rightarrow$ **x = 2**

El conjunto solución es **(x,y) = (2,1)**

Método de Reducción Por Suma o Resta

La aplicación del método de reducción por suma o resta se puede resumir de la siguiente manera:

Regla

1. Se **iguala** el valor absoluto de los coeficientes de una misma incógnita en las dos ecuaciones multiplicando cada ecuación por el valor absoluto del coeficiente de dicha incógnita perteneciente a la otra ecuación.
2. Si los coeficientes de la incógnita elegida tienen **distinto o igual signo** se suman o restan las ecuaciones obtenidas, respectivamente, para reducir(o eliminar) dicha incógnita.
3. Se procede de forma similar con respecto a la incógnita eliminada.
4. Se verifica si el par de valores hallado es la raíz del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 5x - 4y = 2 & \text{a} \\ 3x - 2y = 2 & \text{b} \end{cases}$$

Multiplico la ecuación (a) por 3 y la ecuación (b) por 5 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 15x - 12y = 6 & \text{a} \\ 15x - 10y = 10 & \text{b} \end{cases}$$

$15x - 12y = 6$
\- $15x - 10y = 10$

-2y = -4 $\Rightarrow$ **y = 2**

Como Los coeficientes de x son iguales , resto miembro a miembro las ecuaciones para eliminar " x"

Reemplazo el valor de " x" obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el valor de "y"

15 x – 12 y = 6 $\Rightarrow$ 15 x = 12 y + 6 $\Rightarrow$ 15 x = 12 . 2 + 6 $\Rightarrow$15 x = 24 + 6 $\Rightarrow$

$15\,x = 30 \Rightarrow x = 30 : 15 \Rightarrow$ **x = 2**

El conjunto solución es **(x ,y) = (2 , 2)**

Método de Determinantes o Regla de Cramer

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de ellas puede obtenerse como cociente de determinantes.

Todo determinante de segundo orden es igual al producto de los números pertenecientes a la primera diagonal menos el producto de los números pertenecientes a la segunda diagonal.

Ejemplo: Dados los números 8, 3, 1, y 2, se dispone de la forma que sigue

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8.2 - 1.3 = 16 - 3 = 13$$

Este determinante formado por cuatro números se llama de segundo orden.

Regla

Dado un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, igualmente ordenada, el valor de cada incógnita es el de una fracción que tiene por denominador el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas, y por numerador el determinante que se obtiene reemplazando en el anterior los coeficientes de la incógnita cuyo valor se quiere hallar por los términos independientes respectivos que figuran en el segundo miembro.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 4x - 3y = -7 \\ 6x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-7.2 - 9.(-3)}{4.2 - 6.(-3)} = \frac{-14 + 27}{8 + 18} = \frac{13}{26} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4.9 - 6.(-7)}{4.2 - 6.(-3)} = \frac{36 + 42}{8 + 18} = \frac{78}{26} \Rightarrow y = 3$$

El conjunto solución es (x, y) = $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

UNIDAD 2 - Sistema de Ecuaciones

Actividad Nº 11: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+3y=5 \\ x-5y=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+7y=36 \\ 3x-2y=9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-\dfrac{y}{2}=\dfrac{7}{2} \\ 4x-\dfrac{1}{5}y=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{y}{2}+x=-\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{4}x-2y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x-2)+4y=-6 \\ 4y+8=20 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0{,}7x-0{,}9y=\dfrac{3}{50} \\ 1{,}1x-0{,}12y=\dfrac{6}{5} \end{cases}$

Actividad Nº 12: Resolver las siguientes situaciones problemáticas

a) ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?

b) Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

c) Antonio dice a Pedro: "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú", y Pedro contesta: "si tú me das seis euros de los que tienes tendremos los dos igual cantidad". ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

d) En una empresa trabajan 60 personas. Usan gafas el 16% de los hombres y el 20% de las mujeres. Si el número total de personas que usan gafas es 11. ¿Cuántos hombres y mujeres hay en la empresa?.

e) La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?.

f) Por la compra de dos electrodomésticos hemos pagado 3500 €. Si en el primero nos hubieran hecho un descuento del 10% y en el segundo un descuento del 8% hubiéramos pagado 3170 €. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

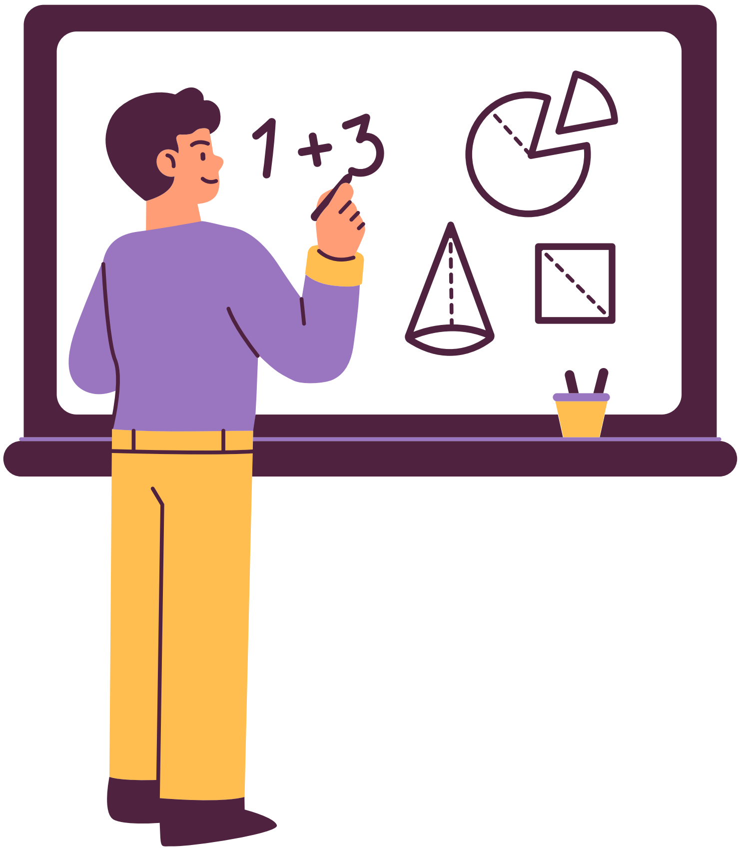
g) Encuentra un número de dos cifras sabiendo que su cifra de la decena suma 5 con la cifra de su unidad y que si se invierte el orden de sus cifras se obtiene un número que es igual al primero menos 27.

Autoevaluación

Accede al siguiente código o link para realizar la autoevaluación de la unidad 2

Autoevaluación Unidad 2

UNIDAD 3



FUNCIONES

UNIDAD Nº3

FUNCIONES

Conceptos fundamentales

En matemática, una ***relación*** se usa para representar la relación que guardan entre sí dos números, dos variables o dos objetos. Una relación se escribe a menudo como un grupo de pares ordenados o bien mediante una regla que describe cómo se relacionan los objetos. En matemáticas, estas reglas pueden estar dadas por una ecuación, una desigualdad o un sistema de ecuaciones o desigualdades. Una ***función*** es una clase especial de relación. Una relación ***es* función** siempre que para cada valor de x le corresponde un único valor de y.

Dominio y Rango

En cualquier relación, el conjunto de todos los valores posibles de la primera componente X se llama ***dominio*** y el conjunto de todos los valores de la segunda componente Y se llama ***rango o recorrido*.**

Por ejemplo:

El grupo de pares ordenados:

$$\{(2,5),(3,8),(4,12),(6,-12)\}$$

Expresa una relación entre el grupo de las primeras componentes, o dominio (2,3,4,6), y el grupo de las segundas componentes o rango (5,8,12,-12).

El dominio y rango son ideas importantes que nos ayudarán a entender mejor una relación, en especial cuando comencemos a graficar.

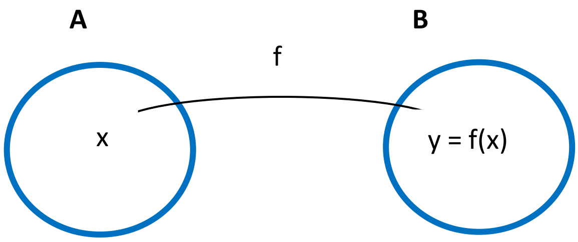
Funciones

Sean A y B dos conjuntos. Una función definida de A en B es una relación que hace corresponder a ***cada*** elemento de A un ***único*** elemento B.

$$f: A \to B/\ y = f(x)$$

El conjunto A se llama dominio o conjunto de partida y se expresa como $\boldsymbol{Dom\ f} = \boldsymbol{A}$.
El conjunto B es el codominio, recorrido, rango, imagen o conjunto de llegada de la función $f(x)$ y se expresa como **Recorrido** $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{B}$.

El elemento y que está asociado a x por medio de f se escribe como $y = f(x)$.



El conjunto Imagen ($Im\ f$) es el subconjunto del codominio formado por todos los valores de $y = f(x)$, con $x \subseteq B$.

Unidad 3 - Definición de Función. Dominio y Recorrido.

Determinación de dominio y rango

Cualquier función se puede describir por medio de un conjunto de pares ordenados, una lista, una tabla, una ecuación o una gráfica, cada una de estas formas de representación pueden utilizarse para determinar el dominio y rango de una función.

Determinar el rango de una función no siempre es tan fácil como determinar el dominio de una función.

A continuación veremos varios ejemplos de cómo determinar el dominio y rango de una función:

Ejemplo 1: Determine el dominio y rango de una función dada por una tabla de valores

x	2	3	4	6
y	5	8	12	-12

En este caso el dominio de la función de acuerdo a la tabla está dado por los valores

D= {2 ,3 ,4 ,6 } , y el recorrido está dado por los valores R = {-12, 5 , 8,12}. Los valores se ordenan en forma creciente.

Ejemplo 2: Determine el dominio y el rango de la función definida por el conjunto de pares ordenados: {(-1,-2) , (0, 4), (3, 8), (5,12)}.

En este caso el dominio de la función son las primeras componentes de los distintos pares: D = {-1,0,3,5} y el recorrido es el conjunto formado por los elementos de las segunda componente R = {-2,4,8,12,}

A continuación veremos cómo se determina el dominio y recorrido de una función definida mediante una ecuación.

Ejemplo 3: Dar el dominio y recorrido de la siguiente ecuación: y = 3 x -1.

En este caso podemos darle cualquier valor a x y obtenemos un valor de y. Por lo tanto decimos que el dominio de esta función son todos los números reales y el recorrido de esta función también son todos los números reales.

Dominio: todos los números reales **D = R**

Recorrido: son todos lo números reales **R = R**

Ejemplo 4: A continuación analizaremos cuál es el dominio y recorrido de la siguiente ecuación:

$$y = x^2 - 2$$

Le podemos dar cualquier valor a x que siempre obtenemos un valor de y. Por lo tanto se puede decir que el dominio de esta función son todos los números reales.

Si observamos cuando reemplazamos los distintos valores de x , sean estos positivos o negativos en la ecuación siempre nos va a dar un número positivo. Si elevo al cuadrado el 0 nos va a dar 0. Por lo tanto, si se eleva al cuadrado cualquier número real, el resultado es mayor o igual que 0. Si a este número le sumo el -2, entonces el resultado será mayor o igual a -2. De este modo concluimos que el rango de esta función serán todos los números reales mayores o iguales a -2.

Dominio: son todos los números reales. D = **R**

Recorrido: son todos los números mayores o iguales a -2. R = { y ≥ -2}

Ejemplo 5: Veremos otro ejemplo cómo determinar el dominio y recorrido de la función

$$y = \sqrt{x}.$$

Debido a que solo es posible extraer la raíz cuadrada de números reales no negativos el dominio es {x / x ≥ 0 } .

El recorrido va a ser todos los números reales positivos junto con el cero.

Dominio: Son todos los valores de x ≥ 0. D = { x / x ≥ 0 }.

Recorrido: Son todos los valores de y ≥ 0. R = { y / y ≥ 0}.

Ejemplo 6: Veremos cómo determinar el dominio y recorrido de la siguiente función:

$y = \sqrt{x^2 - 16}$.

Para encontrar el dominio de la siguiente función tenemos que encontrar todos los números reales tales que $x^2 - 16 \geq 0$. Estos números son $x^2 \geq 16 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{16} \Rightarrow x \geq 4$ y x ≤ -4.

Dominio: son todos los valores. D = { x / x ≥ 4 v x ≤ -4}

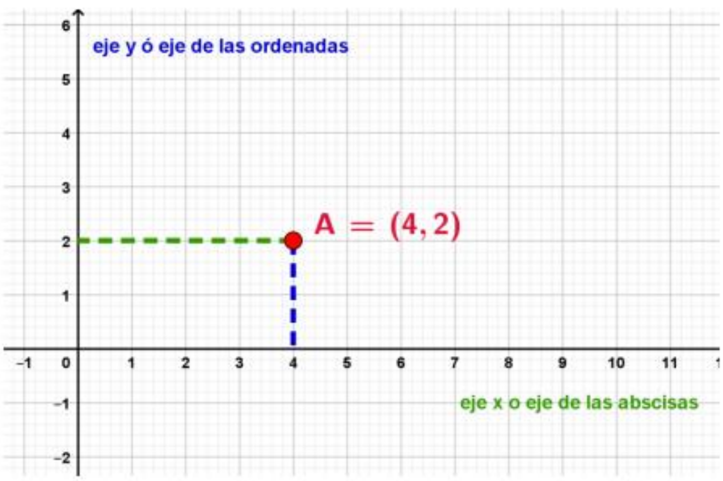
Rango: Son todos los valores de y ≥ 0. R = { y / y ≥ 0}.

A menos de que existan otras restricciones, el dominio de una función definida por una ecuación incluye a todos los números reales, excepto:

- Cualquier número para el cual el denominador sea igual a cero.
- Cualquier número para el que la expresión definida por la ecuación no sea un número real.

Representación de funciones

Las funciones se representan gráficamente en los ejes cartesianos donde cada punto de la función está dado por un par ordenado $(x; y)$. Dado que todo valor y depende de la regla de formación de la función y del valor que se le asigne a x, llamaremos a x, variable independiente y a y, variable dependiente.



Las funciones se pueden representar de distintas formas, mediante Diagramas de Venn, por medio de una tabla de valores o realizando el gráfico correspondiente en los ejes cartesianos ortogonales. En el Diagrama de Venn, dado a continuación, se observan los elementos que pertenecen al dominio, los que pertenecen al codominio y los que conforman la imagen.

Actividad N° 1: Determinar Dominio y recorrido de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt{x+5}$

b) $f(x) = x^2 - 2$

c) $f(x) = -x^2+3$

d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x-3$

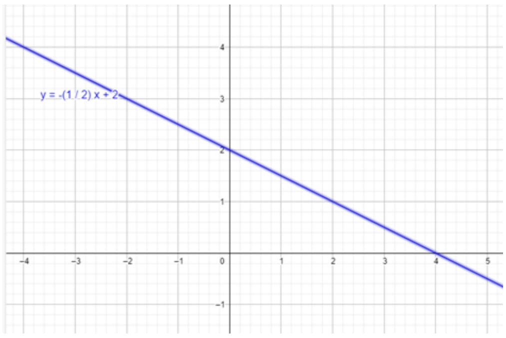
f) $f(x) = -3x+2$

Gráfica de las funciones

Existen distintos tipos de funciones y cada una tiene características particulares que se deben tener en cuenta a la hora de hacer una gráfica y un análisis detallado. Sin embargo, es importante poder encontrar elementos significativos que sirvan a la construcción de la gráfica. Así raíces y ordenada, entre otros, son elementos que caracterizan a las funciones.

Las raíces o ceros de una función son los x del dominio de la función que verifican la ecuación $f(x) = 0$, gráficamente son las intersecciones de la función con el eje de abscisas (eje x). Es importante notar que una función podría no tener raíces reales, tener una sola o tener más de una, esto va a depender de la cantidad de soluciones, si es que tiene, de la ecuación $f(x) = 0$.

La ordenada al origen es el valor y de la ordenada tal que $y = f(0)$, gráficamente es la intersección de la función con el eje de ordenadas (eje y). En el caso de que $x = 0$ no pertenezca al dominio de la función, la misma no tiene ordenada al origen.



Función lineal y=-1/2 x+2

x=4 es raíz;

y=2 es ordenada al origen

La función intercede al eje x en el punto (4,0)

La función intercede al eje y en el punto (0,2)

Unidad 3 - Función Lineal

FUNCIÓN LINEAL

Llamamos ***función lineal*** a toda función del tipo f (x) = a x + b, donde ***a*** y ***b*** son números reales. Su dominio es **R** porque es el conjunto más amplio de números reales para el cual la fórmula tiene sentido.

El gráfico de una función lineal es una recta no vertical.

Se llama ***pendiente*** de una recta al aumento o a la disminución de la variable ***y*** por cada aumento unitario de la variable ***x***.

f(x) = **a** x + **b** → Ordenada al origen

↓

Pendiente

Supongamos que P (x_1,y_1) y Q (x_2 , y_2) son dos puntos diferentes de la recta correspondiente al gráfico de la función lineal, entonces podemos calcular la pendiente como :

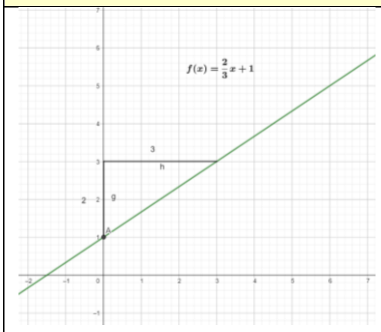
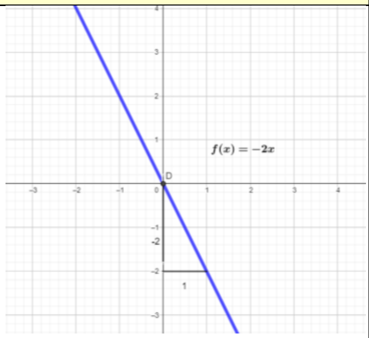
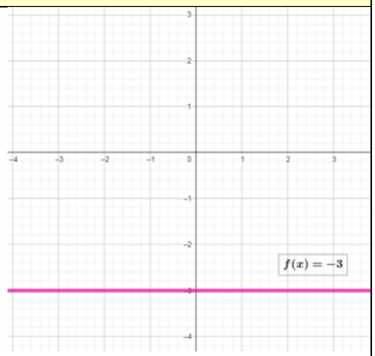
$$a = \frac{y_2 - y_1 \rightarrow \text{Mide el cambio en el eje } y}{x_2 - x_1 \rightarrow \text{Mide el cambio en el eje x}}$$

Una función lineal está dada por la expresión $f(x) = ax + b$, el gráfico de la función lineal es una recta. Donde:

a se llama pendiente de la recta (Relaciona la inclinación de la recta respecto al eje X)

b se llama ordenada al origen (Indica el corte de la recta en el eje Y)

La pendiente y la ordenada, determinan la posición de la recta en el plano.

$Si\ \ \mathrm{a} \neq 0 \ \ \mathrm{y}\, \mathrm{b} \neq 0$ $f(x) = y = ax + b$	$Si\ \ \mathrm{a} \neq 0 \ \ \mathrm{y}\, \mathrm{b} = 0$ $f(x) = y = ax$	$Si\ \ \mathrm{a} = 0 \ \ \mathrm{y}\, \mathrm{b} \neq 0$ $f(x) = y = b$
		
$f(x) = y = \frac{2}{3}x + 1$	$f(x) = y = -2x$	$f(x) = y = -3$

Para graficar una función lineal se tienen las siguientes opciones: Realizar una tabla de valores, asignando valores a la variable independiente y evaluando en la función, para obtener sus respectivas imágenes. Es necesario un mínimo de dos puntos para determinar una función lineal.

Dada una función lineal analizamos su gráfica según la pendiente:

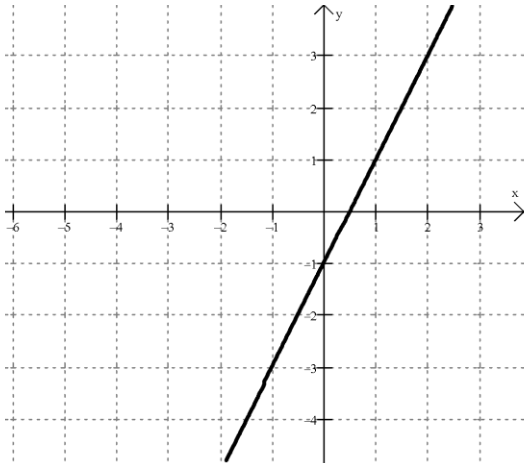
Si **la pendiente es positiva**, el numerador

es positivo, es decir: $y_2 - y_1 > 0$. Entonces a >0

y

$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$

Función ***Creciente***

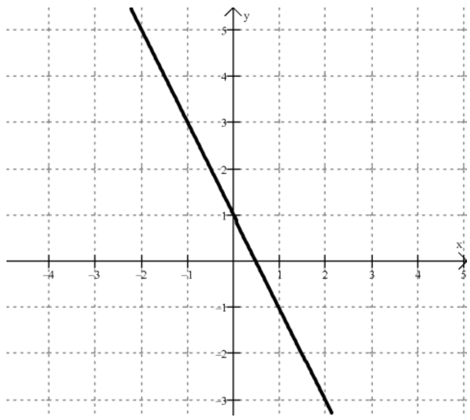


Si **la pendiente es negativa**, el numerador es negativo, es decir:

$y_2 - y_1 < 0$. Entonces a < 0

y $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$

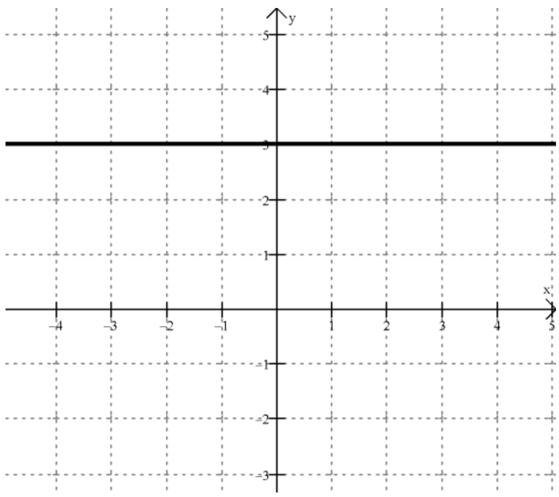
La función es ***decreciente***



Si **la pendiente es cero**, el numerador es cero.

Entonces a = 0 $\Rightarrow y_2 - y_1 = 0 \Rightarrow y_2 = y_1$.

Esto significa que todos los valores de las abscisas tienen la misma imagen. En este caso la función es ***constante.***



Toda recta que no sea vertical corta el eje y en el punto en el cual x = 0. En una función, a la imagen del cero la llamamos ***ordenada al origen***. Para hallar la ordenada al origen de la función lineal f(x) = a x + b, reemplazamos a la x por 0.

$$f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b$$

Formas de ecuación de la recta

Forma general de la recta

Está dada por la forma $ax + by + c = 0$ con a,b,c números reales

Función explícita

Cuando una función se expresa de la forma y = f(x) se denomina ***función explícita.*** Por ejemplo la ecuación $y = f(x) = x - 2$ define a y explícitamente como una función de x.

Funciones implícita

Si la relación de ***x*** y ***y*** no es de esta forma, decimos que ***x*** y ***y*** están relacionadas implícitamente, o que se trata de una ***función implícita.***

Por ejemplo si escribimos la función anterior como y – x + 2 = 0 , y – x = -2 o x - y = -2, entonces la nueva ecuación define a ***y*** implícitamente como una función de ***x.*** Al despejar ***y*** obtenemos la función explícita que teníamos al principio.

Ecuación Segmentaria de la recta

Toda ecuación de la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ representa una recta en forma segmentaria.

Los denominadores a y b representan los puntos de cortes sobre los ejes x e y respectivamente.

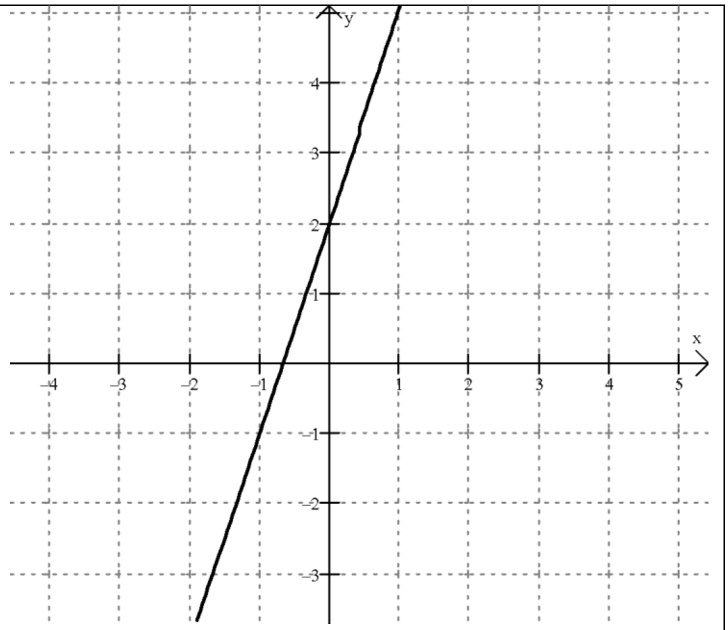
Dada la recta y = 3 x + 2, está dada en forma explícita para pasarla a la forma segmentaria se procede de la siguiente manera:

y = 3 x + 2 $\Rightarrow$ 3 x - y = - 2 $\Rightarrow$

$$\frac{3x}{-2} - \frac{y}{-2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{-\frac{2}{3}} + \frac{y}{2} = 1$$

De este modo obtuvimos la ecuación segmentaria de la recta. Para graficar se marcan sobre los ejes las intersecciones y luego se traza la misma.



<u>Actividad N° 2:</u> Construir la tabla de valores para las siguientes funciones. Graficar. Identificar pendiente y ordenada al origen.

a) $y = 3x + 2$
b) $y = x + 1$
c) $y = 2x$
d) $y = -\frac{1}{2}x$
e) $y = -x + \frac{1}{2}$
f) $y = \frac{2}{3}x - 1$
g) $y = 3$

Actividad N° 3: Completar la siguiente tabla

Función expresada mediante un ENUNCIADO	Función expresada mediante EXPRESIÓN ALGEBRAICA
La función que a cada número le asocia su doble	y=2x
La función que a cada número le asocia su triple más 5	
	y=2x+1
La función que a cada número le asocia su mitad	
La función que a cada número le asocia su opuesto	
	y=-x+2
La función que expresa la distancia recorrida cada hora por un automóvil que circula a 60 km/h	
	$y=x^2$
La función que relaciona el radio de una circunferencia y su perímetro	
La función que relaciona el radio de una circunferencia y su área	

☞ *Ejercicios libro ed. Santillana:* ***pág. 213: 4, 5 y 6***

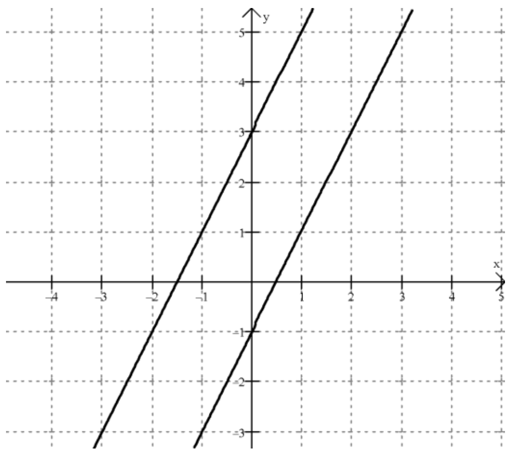
Rectas paralelas y Rectas perpendiculares

La pendiente de una recta indica su inclinación con respecto a los ejes cartesianos

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales

f (x) = 2x – 3

g (x) = 2 x -1

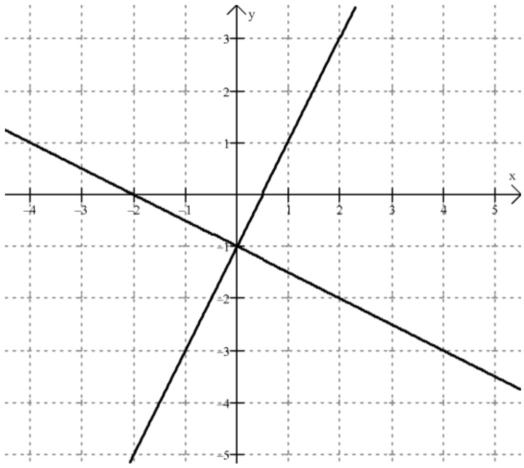


Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a – 1 o lo que es lo mismo decir que sus pendientes son inversas y opuestas

S: $y = a_1 x + b_1 \wedge N : y = a_2 x + b_2 \wedge S \perp N \Leftrightarrow a_1 = -\frac{1}{a_2}$

f(x) = -2 x -1

g(x) = - $\frac{1}{2}x-1$



Rectas paralelas y perpendiculares

Ecuación de la recta, dadas la pendiente y un punto de la misma

La fórmula para hallar la ecuación de la recta, dada su pendiente ***a*** y un punto P**(x_1 , y_1) es:**

Primero recordar como es la ecuación de la recta **y=mx+b**

Luego al tener la pendiente m=a se reemplaza en la ecuación, quedando de esta forma la recta **y=ax+b** finalmente como la recta debe pasar por el punto P(x1 , y1) se reemplaza en la Ecuación por el punto, obteniendo de esta forma **y1=a x1 +b** en donde la única incógnita es "b", por lo que despejando se encuentra que **b = y1- a x1**

Finalmente se llega a la ecuación de la recta : y=ax+b

Otra forma para la **Ecuación de una recta, dadas la pendiente y un punto es:**

La fórmula para hallar la ecuación de una recta, dado un punto **P(x_1 , y_1)** y la pendiente **m** es:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Ejemplo: Obtener la ecuación explícita de una recta cuya pendiente es -3 y pasa por el punto (1, - 2)

Primero recordar como es la ecuación de una recta **y=mx+b**

Luego al tener la pendiente m=-3 se reemplaza, quedando de esta forma la recta **y=-3x+b**

finalmente como la recta debe pasar por el punto P(1 , -2) se reemplaza en la ecuación por los puntos, obteniendo de esta forma

-2=-3.1 +b en donde la única incógnita es el valor de b, por lo que despejando encontramos **b = -2+ 3 1 , b=1**

Finalmente llegamos a la ecuación de la recta : y=-3x+1

Unidad 3 - Ecuación de la recta dada la pendiente y un punto.

Ecuación de una recta, dados dos puntos

La fórmula para hallar la ecuación de la recta, dados dos puntos P**(x_1 , y_1)** Q**(x_2 , y_2) es:**

Primero recordar como es la ecuación de la recta **y=mx+b**

La información que se requiere es m(pendiente) y b(ordenada al origen)

La pendiente puede obtenerse de $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}}$

Luego al tener la pendiente m=a se reemplaza en la ecuación, quedando de esta forma la recta **y=ax+b** finalmente como la recta debe pasar por los puntos P(x1 , y1) Q(x2 , y2).

Por lo tanto se elige alguno de los puntos por ejemplo P (x1,y1) y se reemplaza en la Ecuación, obteniendo de esta forma **y1=a x1 +b** en donde la única incógnita es "b", por lo que despejando se encuentra que **b = y1- a x1**

Finalmente se llega a la ecuación de la recta : y=ax+b

Otra forma para hallar la ecuación de una recta, dados dos puntos pertenecientes a ella :P(x_1 , y_1) y Q (x_2 , y_2) es por medio de la fórmula:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplo (utilizando la fórmula): Obtener la ecuación explícita de una recta que pasa por los puntos P(3,2) y Q(4, – 3)

$$y - 2 = \frac{-3-2}{4-3}(x-3) \Rightarrow y - 2 = -5(x-3) \Rightarrow y - 2 = -5x + 15 \Rightarrow y = -5x + 15 + 2$$

$$\Rightarrow y = -5x + 17$$

Unidad 3 - Ecuación de la recta dados dos puntos

Actividad N° 4: Dada las siguientes funciones lineales $f(x) = 3x + 2$, $f(x) = -2x + 5$, y $f(x) = 5x$

a. Graficar
b. Calcular f(0), f(2), f(-1)
c. Encontrar la raíz (Valor de x para f(x)=0)
d. Encontrar el valor de x para

f(x)=1

f(x)=2

f(x)= -3

Actividad N° 5: Hallar la ecuación de la recta:

a. Que pasa por el punto P (2,9) y tiene pendiente -3.

b. Que pasa por el punto P (1; 5) y tiene pendiente 0

c. Que pasa por el punto P (3; -4) y tiene pendiente -1

Actividad N° 6:

a) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $y = ax + 5$ pase por el punto (1; 4).

b) Hallar $b \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $y = -2x + b$ pase por el punto (-3; 1)

c) Hallar el valor de k, tal que la recta 3x-5ky+16=0 pase por el punto P(-2,3)

Actividad N° 7:

a) Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(1,-1) y Q(4,8)

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(-2,4) y Q(1,1)

c) Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(-4,-1) y Q(2,-4)

Actividad N° 8 : Rectas paralelas y perpendiculares

I. Dada la recta R de ecuación $y = \frac{2}{3}x + 2$, obtener la ecuación explícita de la recta T // R que cumpla con la condición indicada en cada caso.

a. T tiene ordenada al origen –2

b. T pasa por el punto (-1,2)

c. T pasa por el origen de coordenadas

d. T corta al eje x en x = 2

II. Dada la recta R de ecuación y = 4x + 1 obtener la ecuación explícita de la recta T ⊥ R que satisfaga la condición indicada en cada caso

a. T pasa por el punto (-1,3)

b. T pasa por el origen de coordenadas

c. T tiene ordenada al origen –2

d. T corta al eje x en x = -1

e. T corta al eje y en y = 2

III. Encontrar el valor de k, para que la recta 3x-ky-7=0 sea perpendicular a la recta 7x+4y-11=0.

IV. Encontrar el valor de k para que la recta 6x+2ky=3 sea paralela a la recta 3kx+4y=10.

<u>Actividad N° 9:</u> Algunas situaciones

a) Un kg de papas cuesta 85 pesos. Obtener y representar la función que define el costo de las papas (y) en función de los kg comprados (x). ¿Cuál es su Dom(f)? ¿Cuánto costarán 3,5 kg? ¿Qué cantidad podremos comprar si sólo disponemos de un billete de 500?

b) Una canilla vierte agua a un depósito dejando caer 25 litros por minuto. Formar una tabla de valores apropiada para representar la función "capacidad" en función del tiempo. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar una piscina de 50 m3 ?

c)Los paquetes de folios que compra un determinado instituto constan de 500 folios y cuestan 300 pesos.

a) Formar una tabla que nos indique el precio de 1, 2, ..., 10 folios.

b) Dibujar la gráfica correspondiente ¿Qué tipo de función se obtiene? ¿Cuál es la ecuación?

d) Pasada la temporada de invierno, un local de ropa deportiva hace en todos los artículos un 20% de descuento. a) ¿Cuál será el precio rebajado de unas zapatillas de deporte que costaban 45000 pesos? ¿Y de una campera de abrigo que costaba 60000? b) Si llamamos **x** al antiguo precio del artículo e **y** al precio rebajado, ¿qué función se obtiene?

e) Se quiere abrir un pozo de forma cilíndrica de diámetro 2 m. Expresar el volumen de agua que cabe en él en función de la profundidad h. ¿Qué tipo de función se obtiene?

f) Representar el siguiente enunciado en forma algebraica: a) Sea °F, la temperatura en grados Fahrenheit y C la temperatura Celsius. La temperatura Fahrenheit es igual a 9/5 de la temperatura Celsius, más 32. b) ¿35°C a cuántos grados Fahrenheit (°F) equivale?

Función cuadrática

A la función polinómica de segundo grado f(x) = a x^2 + b x + c, siendo a, b y c números reales y a $\neq$ 0, se le denomina función cuadrática:

Los términos de la función reciben los siguientes nombres:

$$f(x)= \quad ax^2 + bx + c$$

Término cuadrático Término independiente

Término lineal

La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.

A continuación graficamos funciones cuadráticas del tipo:

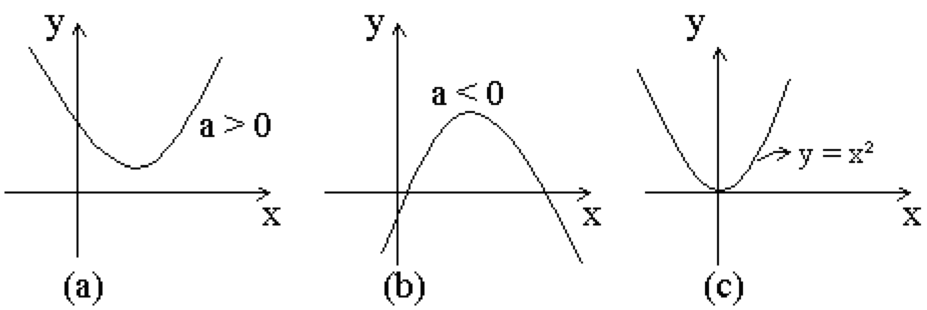
a) f(x) = a x^2

Analizaremos qué efecto produce el coeficiente **a**

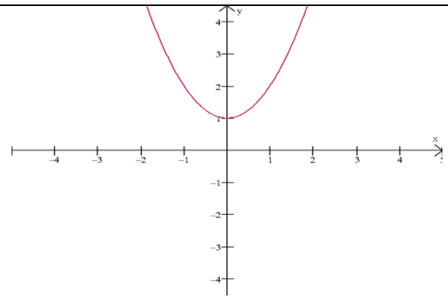
a) a > 0 $\rightarrow$ La gráfica de la parábola va hacia **arriba (gráfica a)**

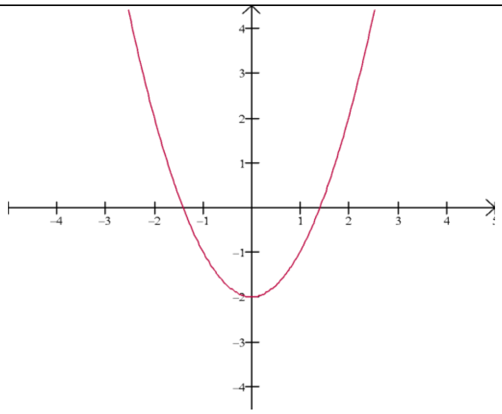
b) a < 0 $\rightarrow$ La gráfica de la parábola va hacia **abajo (gráfica b)**

c) y = x^2 (gráfica c)



b) Función de la forma f(x) = x^2 + c

Si c > 0 $\rightarrow$ la gráfica se desplaza hacia **arriba**	

Si c < 0 $\rightarrow$ la gráfica se desplaza hacia **abajo**	

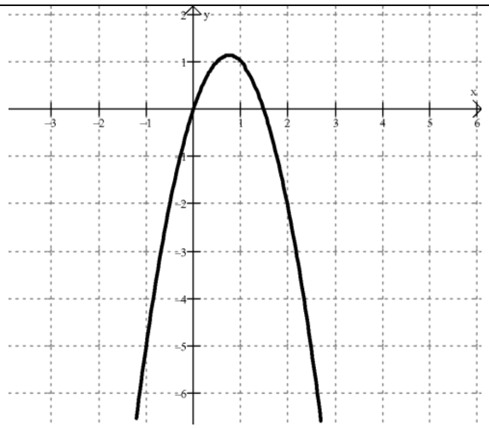
Ustedes podrán observar que el coeficiente **c** indica donde va a estar el vértice por lo tanto, el punto de corte sobre el eje de las abscisas.

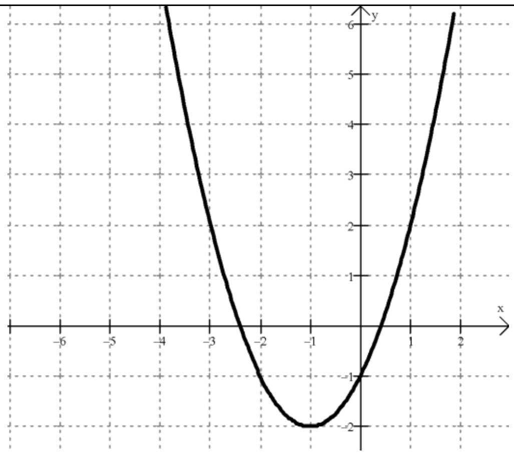
c) f (x) = a x^2 + b x

Presten atención en lo siguiente, ustedes pueden saber si la gráfica estará desplazada a la derecha o a la izquierda de acuerdo al signo de los coeficientes a y b.

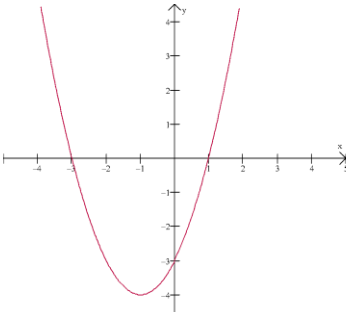
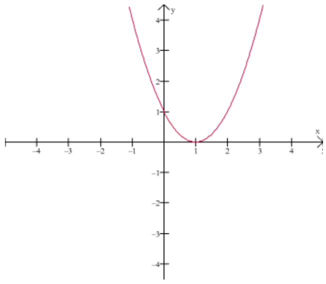
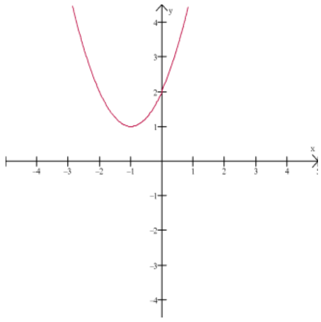
Es decir si **a y b** tiene el mismo signo la gráfica se desplaza hacia **la izquierda**, en cambio si **a y b** tiene distinto signo se desplaza hacia la **derecha**

Por ejemplo

f (x) = - 2 x^2 + 3 x	

f(x) = x^2+ 2x - 1	

Cortes con el eje x según el valor del discriminante

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
 La gráfica tiene dos puntos de intersección con el eje x	 La gráfica tiene un punto de intersección con el eje x.	 La gráfica no tiene puntos de intersección con el eje x

Ver el siguiente enlace y analiza la gráfica, variando el valor de a,b y c.

Unidad 3 - Gráfica

Representación gráfica de la Parábola

Para graficar una función cuadrática se debe tener por lo menos tres puntos, "las raices" y el vértice.

A continuación veremos cómo obtenemos las raíces de una ecuación de segundo grado:

- Para calcular las raíces empleamos la siguiente fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Los valores que obtenemos son los puntos de intersección de la gráfica y el eje de las abscisas.

- Calcularemos el vértice de la parábola, recuerden que el vértice de la parábola es un punto por lo tanto deben encontrar el valor de la abscisa y el de la ordenada.

P (x_v , y_v)

$x_v = \dfrac{-b}{2a}$, $y_v = -\dfrac{b^2}{4a} + c$

- Eje de simetría es la recta que tiene por ecuación $x = x_v$
- Ordenada al origen, es el punto de intersección de la gráfica con el eje y, vale decir que F (0) = c

Unidad 3 - Función Cuadrática

A continuación veremos un ejemplo $f(x) = x^2 + 2x - 3$

La ordenada al origen es - 3, por lo tanto sabemos que el punto (0, -3) pertenece a la función.

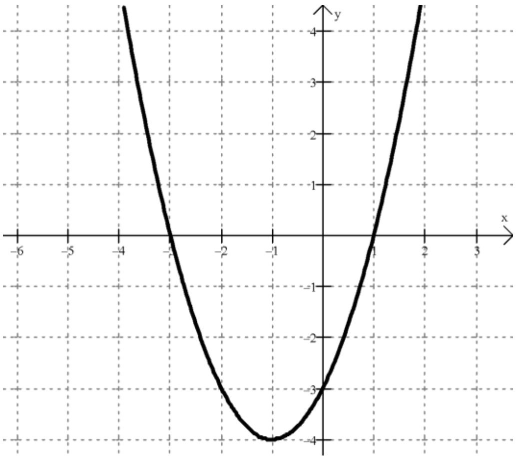
Calcularemos las raíces:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+4}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \\ x2 = \dfrac{-2-4}{2} \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

Hallemos el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{2}{2} = -1 \\ v_y &= -\frac{4}{4} - 3 = -4 \end{aligned}\right\}$$ vértice : (-1 ; -4)

Con estos puntos podemos trazar la parábola:



Unidad 3 - Función Cuadrática Ejemplo Práctico

Actividad N° 10: Dadas las siguientes funciones, hallar:

i) Vértice.

ii) Posibles puntos de corte con los ejes.

iii) Representación gráfica.

a) $y = x^2 - 6x + 8$

b) $y = x^2 - 2x - 3$

c) $y = -x^2 - 4x - 3$

d) $y = x^2 - 6x$

e) $y = x^2 - 4$

f) $y = -2(x - 1)^2 + 8$

Actividad N° 11: Resolver las siguientes situaciones problemáticas

a) Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $\boldsymbol{y = x^2 + ax + a}$ y pasa por el punto (1,9). Calcular el valor de a. ¿Cuál es su vértice?

b) Calcular el valor de b, para que la parábola $y = x^2 + bx + 3$ pase por el punto P(2,-1). ¿Cuál es su vértice?

c) La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto vale c? Si además sabemos que pasa por los puntos (1,3) y (4,6), calcular el valor de a y b. Graficar Calcular m para que la parábola y= $x^2 + mx + 10$ tenga como vértice el punto (3,1). ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

d) Se sabe que la función $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1,1), (0,0) y (-1,1). Calcular a, b y c.

e) Se sabe que la función $y = ax^2 + bx + c$ pasa los puntos (1,4), (0,-1) y (2,15). Calcular a, b y c.

f) Entre todos los pares de números cuya sumas es 100, determinar el par cuyo producto es lo más grande posible.

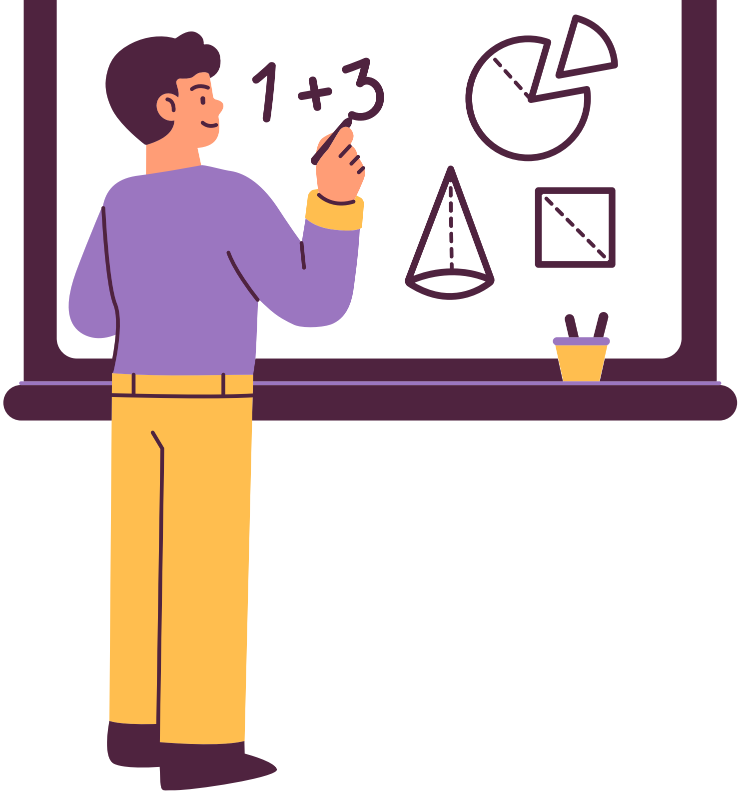
g) Un granjero desea proteger un campo rectangular con una cerca y dividirlo en dos campos rectangulares más pequeños mediante una cerca paralela a uno de los costados del campo. Tiene disponible 3000 m de cerca, Determine las dimensiones del campo de manera tal manera que el área total protegida sea máxima.

Autoevaluación

Accede al siguiente código o link para realizar la autoevaluación de la unidad 3.

Autoevaluación Unidad 3

UNIDAD 4



EXPRESIONES ALGEBRAICAS

UNIDAD Nº 4
EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se llama expresión algebraica a todo conjunto de números representados por letras, o por letras y números, relacionados entre sí por las siguientes operaciones: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Las expresiones algebraicas las podemos clasificar en:

Expresiones algebraicas enteras: son aquellas en que ninguna letra, figura como divisor o bajo el signo radical.

Ejemplo: $3x^4y^5 + 7z^3 - 2x^2$

Expresiones algebraicas fraccionarias: son aquellas en la que al menos una letra figura en el denominador:

Ejemplo: $\frac{2}{x-4} + \frac{3}{x} - \frac{5x^2}{2-x}$

Expresiones algebraicas irracionales: son aquellas en la que al menos una letra figura bajo el signo radical o como potencia de exponente fraccionario:

Ejemplo: $4\sqrt{x} - 3x^{\frac{5}{2}} - \sqrt[3]{x^2}$

Expresiones algebraicas enteras

Una expresión algebraica es entera cuando, con respecto a sus letras, figura en ellas las operaciones de suma, resta, multiplicación y potenciación con exponentes positivos.

MONOMIOS

Es toda expresión algebraica entera cuyas letras están vinculadas por las operaciones de multiplicación y potenciación con exponentes enteros positivos.

Ejemplos: $\frac{4}{3}x^4y^5$

Todo monomio tiene dos partes: coeficiente y parte literal

- ***Parte literal***: la o las letras (variables con sus exponentes). En el ejemplo anterior la parte literal del primer término es $x^4 y^5$. En general trabajaremos con funciones de una variable.
- ***Coeficiente:*** Factor numérico que acompaña a la variable, si no aparece se considera que es 1. El coeficiente del ejemplo es $\frac{4}{3}$

Monomios semejantes

Se llaman monomios semejantes los que tienen la misma parte literal.

Ejemplos: $4x^3y^2$ y $-5x^3y^2$ son semejantes, también los son $4x^5$ y $3x^5$

Grado de un monomio

El grado de un monomio es igual a la suma de los exponentes de la parte literal.

Ejemplo: $4x^3y^2$ el monomio es de grado 5

$\frac{5}{2}xyz^6$ el monomio es de grado 8

POLINOMIOS

Se llama polinomio a toda suma algebraica de monomios. Cada monomio es un término del polinomio.

En general al polinomio lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

Donde $a_0, a_1, \ldots a_n$, son los coeficientes y " x", es la variable.

En esta expresión consideramos que $a_n \neq 0$ entonces "n" es el grado del polinomio y a_n es su coeficiente principal.

Un polinomio de dos términos es un ***binomio***. Ejemplo: $x + 2$

Un polinomio de tres términos es un ***trinomio***. Ejemplo: $x^3 - 2x^2 + 4$

Un polinomio de cuatro términos es un ***cuatrinomio.*** Ejemplo: $-5x^5 - x^3 - 2x^2 + 4$

Grado de un Polinomio

El grado de un polinomio es igual al monomio de mayor grado que en él figura.

Ejemplo: $4x^3 - 3x^5 + 6x - 7x^2$. El polinomio es de grado cinco

Se llama coeficiente principal al coeficiente que acompaña al monomio de mayor grado.

El ***coeficiente principal*** del ejemplo anterior es: -3

Polinomios completos e incompletos

Un polinomio es ***completo*** cuando presenta todas las variables en forma decreciente. Un polinomio es incompleto cuando faltan algunas de las potencias.

Ejemplo: Polinomio completo $P(x) = 2 + 5x - \frac{3}{2}x^2 + 7x^3 + 7x^4$

Polinomio de: cuarto grado

El número de términos es: 5

El término independiente: 2

El coeficiente término cuadrático: $-\frac{3}{2}$

El coeficiente principal es: 7

El término Lineal es: 5 x

Ejemplo: Polinomio incompleto $Q(x) = 5x^3 + \frac{8}{3}x^5$

Polinomio de: grado 5

Si lo completamos: $\mathrm{Q}(\mathrm{x}) = 0 + 0\,\mathrm{x} + 0\,\mathrm{x}^2 + 5\,\mathrm{x}^3 + 0\,\mathrm{x}^3 + \frac{8}{3}x^5$

Ordenado en forma creciente

El número de términos es: 2

El coeficiente término cúbico es: 5

El coeficiente principal es: $\frac{8}{3}$

OPERACIONES CON MONOMIOS

Suma de monomios semejantes

La suma de varios monomios semejantes es igual a otro monomio semejante, cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de los monomios dados y la parte literal es la misma.

Ejemplo: Sean los monomios: $-5x^2$, $3x^2$, $-\frac{1}{4}x^2$.

Se suman: $-5x^2+3x^2-\frac{1}{4}x^2=-\frac{9}{4}x^2$

Suma de monomios no semejantes

La suma de varios monomios no semejantes es igual al polinomio formado por la suma de dichos monomios.

Ejemplo: Sean los monomios: $4x^2$, $\frac{1}{3}x$, $-\frac{5}{3}x^3$.

Se suman: $4x^2+\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}x^3$

Resta de monomios semejantes

Se restan los coeficientes y conserva la misma parte literal.

Ejemplo: Sean los monomios: $-5x^2$, $3x^2$,.

Se restan: $-5x^2-3x^2=-8x^2$

Resta de monomios no semejantes

Para restar dos monomios se suma al monomio minuendo el monomio sustraendo cambiado de signo.

Ejemplo: Sean los monomios: $-5x^2$, $-8x^4$,.

Se restan: $-5x^2-\left(-8x^4\right)=-5x^2+8x^4$

Se obtiene como resultado un polinomio.

Multiplicación de monomios

El producto de dos monomios es otro monomio con coeficientes igual al producto de los coeficientes de los factores y el grado es la suma de los grados de los factores.

Ejemplo:

$$4x^4.\left(-3x^5\right)=-12x^9$$

$$5x^3.\frac{4}{7}x=\frac{20}{7}x^4$$

División de monomios

El cociente de dos monomios es igual a otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes y cuya parte literal es el cociente de las potencias de igual base del dividendo y divisor, siempre que la diferencia de los exponentes sea positiva o nula.

Ejemplo:

$$48x^4:\left(-3x^3\right)=-16x$$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma de polinomios

Para sumar varios polinomios se forma el polinomio suma con los términos de dichos polinomios, sumando los monomios de igual parte literal, y se obtiene la suma buscada. La manera práctica de sumar o restar polinomios es ubicarlos uno debajo del otro, de manera que los términos semejantes queden en columna:

Ejemplo: Sumar los siguientes polinomios

$P(x)=x^4-5x^3+2x^2-3$, $Q(x)=-9x^3+x^2+x-1$, $R(x)=-10x^3+4x^2-3x+1$

$$\begin{array}{llllll}
x^4 & -5x^3 & +2x^2 & & -3 \\
 & -9x^3 & +x^2 & & -1 \\
 & 10x^3 & +4x^2 & -3x & +1 \\
\hline
x^4 & -4x^3 & +7x^2 & -3x & -3
\end{array}$$

Resta de polinomios

Para restar de dos polinomios se suma, sumando al polinomio minuendo el polinomio sustraendo cambiado de signo, término a término.

Ejemplo: Restar los siguientes polinomios

$P(x)=5x^4-4x^3-3x^2-4$ $Q(x)=-8x^3-2x^2+x-7$

$$\begin{array}{rrrrr} 5x^4 & -4x^3 & -3x^2 & & -4 \\ & -8x^3 & -2x^2 & +x & -7 \\ \hline 5x^4 & +4x^3 & -x^2 & -x & +3 \end{array}$$

Unidad 4 - Suma y Resta de Polinomios

Multiplicación de Polinomios

Multiplicación de un polinomio por un monomio

El producto de un polinomio por un monomio, es igual a la suma algebraica de los productos de cada término del polinomio por dicho monomio. Se aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

Ejemplo: $\left(3x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 6x + 4\right).4x^2 = 12x^5 - \frac{16}{3}x^4 - 24x^3 + 16x^2$

Multiplicación de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios aplicamos la propiedad distributiva, es decir, multiplicamos cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio.

Ejemplo:

$P(x) = 2x^2 - 4x + 3$ y $Q(x) = 4x^2 - x$

P (x) . Q (x) = $(2x^2 - 4x + 3)(4x^2 - x)$

$= 2x^2.4x^2 + 2x^2.(-x) + (-4x).4x^2 + (-4x).(-x) + 3.4x^2 + 3.(-x)$

$= 8x^4 - 2x^3 - 16x^3 + 4x^2 + 12x^2 - 3x$

$$= 8x^4 - 18x^3 + 16x^2 - 3x$$

Una forma práctica para efectuar el producto de polinomios es efectuar los cálculos en forma ordenada, por ejemplo:

P (x) = $3x^4 - 2x^3 + 3x - 7$ y Q (x) = $2x^2 - 4x + 3$

P (x) . Q (x)

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & 3x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +3x & -7 \\
 & \text{x} & & & & 2x^2 & -4x & +3 \\
\hline
 & 6x^6 & -4x^5 & +0x^4 & +6x^3 & -14x^2 & & \\
+ & & -12x^5 & +8x^4 & +0x^3 & -12x^2 & +28x & \\
 & & & 9x^4 & -6x^3 & +0x^2 & +9x & -21 \\
\hline
 & 6x^6 & -16x^5 & +17x^4 & +0x^3 & -26x^2 & +37x & -21
\end{array}$$

Unidad 4 - Multiplicación de Polinomios

IDENTIDADES NOTABLES

Cuadrado de un binomio: El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el duplo del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 a b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 a b + b^2$$

Ejemplos:

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2.2x.3y + (3y)^2$$

$$= 4x^2 + 12x.y + 9y^2$$

$$(4x-2y)^2 = (4x)^2 + 2.4x.(-2y) + (-2y)^2$$

$$= 16x^2 - 16x.y + 4y^2$$

Cubo de un Binomio: El cubo de un binomio es iguala al cubo del primer término. más el triplo del cuadrado del primer término por el segundo término, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplos:

$$(3x+2y)^3 = (3x)^3 + 3.(3x)^2.2y + 3.3x.(2y)^2 + (2y)^3$$

$$= 27x^3 + 54x^2.y + 36x.y^2 + 8y^3$$

$$(4y-3x)^3 = (4y)^3 + 3.(4y)^2.(-3x) + 3.4y.(-3x)^2 + (-3x)^3$$

$$= 64y^3 - 144y^2.x + 108y.x^2 - 27x^3$$

Suma por diferencia de dos monomios

El producto de la suma de dos monomios por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.

$$(a+b).(a-b) = a^2 - a.b + a.b - b^2$$

$$= a^2 - b^2$$

Ejemplos:

$$(4+x).(4-x) = 4^2 - x^2$$

$$(5x+7y).(5x-7y) = (5x)^2 - (7y)^2$$

$$= 25x^2 - 49y^2$$

<u>Actividad Nº 1:</u> Indique cuál de las siguientes expresiones son algebraicas enteras (a y b son constantes):

a) $3x^2 + 4x$

c) $\left(2x^3\right)(5y)\sqrt{3}ab - \dfrac{7a}{b}$

b) $47x^4 - 9y^5$

d) $-3x^5 - (4a) + \left(\frac{b}{5}\right) + 9\sqrt{y}$

Actividad Nº 2: Identifique los términos semejantes:

a) $3x^2y$; $17x^2y$; $12xy^2$

b) $3x^2y$; $-9xy^2$; $5xy^2$ y $6\left(x^2 + y\right)$

c) ax^2 ; a^2x ; $5x^2$; $5a^5x$.

Actividad Nº 3: Resuelva las siguientes sumas algebraicas:

a) $-\frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^3 =$

b) $\frac{3}{7}x^4 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{1}{14}x^4 =$

c) $2x - \frac{9}{2}x - \frac{5}{3}x =$

d) $\left(2x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{5}{3}x^2\right) - \left(5x^3 - \frac{7}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^2\right) =$

e) $\left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{10}x^5 + 3x^4\right) + \left(0{,}3x^6 + \frac{7}{2}x^5 - 0.4x^2\right) =$

f) $\left(2x^9 - \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^6\right) - \left(-\frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^9 - \frac{3}{2}x^5\right) =$

g) $\left(-\frac{2}{7}x^4 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^9\right) + \left(-\frac{4}{5}x^4 - \frac{7}{2}x^9 - \frac{5}{2}x^5\right) =$

h) $\left(-x^4 - \frac{11}{2}x^3 - \frac{10}{3}x^2\right) - \left(-5x^3 + \frac{7}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^2\right) =$

i) $\left(4x^4 - x^3 - \frac{5}{3}x\right) + \left(5x^3 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{8}{3}x\right) =$

j) $\left(-12x^7 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{11}{3}x^2\right) - \left(-9x^3 - \frac{7}{2}x^7 - \frac{8}{3}x^2\right) =$

Actividad Nº 4: Efectúe las siguientes multiplicaciones:

a) $(3ax)(2ax^2) =$

b) $(2r^2 + 3x)(2r^2 - 3x) =$

c) $(3x)(4ax)(-2x^2b)$

d) $(4p^3 - 7d)\ (4p^3 + 7d)$

e) $-3n\ (2n - 5)$

f) $\left(-x^4 - \frac{11}{2}x^3 - \frac{10}{3}x^2\right) \cdot \left(-5x^3 + \frac{7}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^2\right) =$

g) $\left(2x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{5}{3}x^2\right)\left(5x^3 - \frac{7}{2}\right) =$

h) $\left(2x^9 - \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^9\right) =$

i) $\left(-x^4 - \frac{11}{2}\right) \cdot \left(-5x^3 + \frac{7}{2}x\right) =$

Actividad Nº 5: Desarrollar cuadrado y cubo de los siguientes binomios:

a) $(2x - 5)^2 =$

b) $\left(-5x^3 + \frac{3}{5}x^2\right)^2 =$

e) $\left(-3x^2 - 2x^3\right)^3 =$

f) $\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x\right)^3 =$

c) $\left(\frac{4}{3}x^5 - \frac{6}{5}x^2\right)^2 =$

d) $\left(-2x^2 - \frac{3}{2}x^3\right)^2 =$

g) $\left(\frac{1}{4}x + \frac{2}{5}x^3\right)^3 =$

h) $\left(-2x^2 - \frac{3}{4}x^3\right)^3 =$

<u>Actividad Nº 6:</u> Aplicar diferencia de cuadrados:

a) $(2x-5).(2x+5)=$

b) $\left(\frac{3}{4}x+5y\right).\left(\frac{3}{4}x-5y\right)=$

c) $\left(\frac{5}{3}x-7y\right).\left(\frac{5}{3}x+7y\right)=$

d) $(9x-y).(9x+y)=$

División de un polinomio por un monomio

Para efectuar la division de un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio.

Ejemplo: $\left(3x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 6x\right) : 4x = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}$

División de polinomios

Para hallar el cociente entero de dos polinomios enteros es necesario tener presente lo siguiente:

Dividir un polinomio entero A(x) por otro polinomio B(x) ambos ordenados en forma decreciente, es hallar un tercer polinomio entero, C(x), del mayor grado posible, que verifique la igualdad:

A(x) = B(x) . C(x) + R (x)

Siendo R(x), el resto de la división, un cuarto polinomio en x de menor grado que el del divisor.

Regla:

1. Se ordenan los polinomios en forma decreciente, completando el dividendo si fuera necesario.
2. El primer término del cociente se halla dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor.
3. Se multiplica el primer término del cociente por cada término del divisor, debiendo restar cada producto del término semejante del dividendo. (Cada resta se transforma en suma cambiando el signo del sustraendo).

4. Los términos contrarios se suprimen. Se completa el resto con los términos necesarios del dividendo.
5. Se divide el primer término del resto por el primer término del divisor hallando así el segundo término del cociente.
6. Se repite el procedimiento indicado en 3 con respecto al nuevo dividendo.
7. Se prosigue la división como se indica en 4, 5 y 6 hasta que el grado del resto sea menor que el grado del divisor.

Ejemplo: Dividir los siguientes polinomios $P(x) = 4x^4 + 2 - 2x^3 - x$, $Q(x) = x^2 - 2x$

Al polinomio P(x) lo ordenamos y completamos: $P(x) = 4x^4 - 2x^3 + 0x^2 - x + 2$

$$4x^4 - 2x^3 + 0x^2 - x + 2 \qquad \underline{x^2 - 2x}$$

$$\underline{-4x^4 + 8x^3} \qquad 4x^2 + 6x + 12$$

$$6x^3 + 0x^2 - x + 2$$

$$\underline{-6x^3 + 12x^3}$$

Cociente C (x)

$$12x^2 - x + 2$$

$$\underline{-12x^2 + 24x}$$

$$23x + 2$$

Resto R (x)

Unidad 4 - División de Polinomios

Regla de Ruffini

La **regla de Ruffini**, es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio P(x) por otro polinomio de la forma **(x ± a)**

Sean los polinomios $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$

Aplicando la regla de Ruffini**.**

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -1 & -5 \\ -2 & & -4 & -2 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}$$

Coeficientes del cociente **Resto**

Cociente: $C(x) = 2x^2 + x - 3$ **Resto:** 1

Los pasos seguidos fueron:

1. Lo primero que se hace es ordenar y completar el Polinomio P(x), luego se colocan los coeficientes del polinomio ordenado en forma decreciente.
2. En la segunda fila de la izquierda se escribe a, en este caso – 2.
3. En la tercera fila, se baja el coeficiente del término de mayor grado: 2 (éste es el coeficiente del primer término del cociente). Lo multiplicamos por –2 y el resultado – 4 se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo 5. Se suman –4 y 5 y el resultado 1 se escribe abajo.
4. El 1 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por –2 y el resultado – 2 se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo –1. Se suman –1 y –2 y el resultado -3 se escribe abajo.
5. El –3 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por – 2 y el resultado 6 se escribe debajo del último coeficiente del dividendo –5. Se suman –5 y 6 y el resultado 1 es el resto. Se escribe abajo.

6. El resto es 1. Los valores 2, 1 y – 3 son los coeficientes del cociente: $C(x) = 2x^2 + x - 3$, cuyo grado es una unidad menor que el polinomio dividendo.

Al dividendo de la división podríamos escribirlo así:

$$2x^3 + 5x^2 - x - 5 = (x+2).(2x^2 + x - 3) + 1$$

Unidad 4 - Ruffini

Valor numérico de una expresión algebraica

Se llama valor numérico de una expresión algebraica, para un sistema de valores asignados a sus letras, al número que se obtiene como resultado de efectuar las operaciones indicadas en dicha expresión algebraica una vez reemplazadas sus letras por los valores correspondientes.

Ejemplos: Hallar el valor numérico de:

a) $3ax^2 - 3z$ para a = -2; x= 3; z = -5.

Se reemplaza en la expresión algebraica cada letra por su valor correspondiente, y luego resolviendo se tiene:

$$3.(-2).3^2 - 3.(-5) = -54 + 15 = -39$$

b) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 7$ para x = 2. Reemplazando se tiene:

$$P(2) = 2.2^3 - 4.2^2 - 2 + 7$$

$$P(2) = 16 - 16 - 2 + 7$$

$P(2) = 5$

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio entero en x, P(x), por un binomio de la forma $(x + a)$ siendo **a** un número racional, es igual al valor numérico que adquiere el polinomio dividiendo para x igual al segundo término del divisor cambiado de signo.

$$P(x) = (x - a).C(x) + r$$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - a \\ \cline{2-2} r & C(x) \end{array} \Rightarrow \mathbf{P(x) = (x - a) . C(x) + r}$$

Si sustituimos x por a $\Rightarrow$ P (a) = (a – a) . C (a) + r

$\Rightarrow$ P (a) = r

Ejemplo: P (x) = 2 x^4 – 10 x^2 – 7¿Cuál es el resto al dividirlo por (x + 3) ?

Reemplazamos al polinomio P(x) por -3

P (3) = 2 $(-3)^4$ – 10 $(-3)^2$ - 7

= 2 . 81 – 10 . 9 – 7

= 162 – 90 -7

= 65

El resto es de 65.

RAÍCES DE UN POLINOMIO

Un número real **"a "**es raíz del polinomio P(x) si a es solución de la ecuación P(x) = 0. Lo que significa que si reemplazamos en el polinomio a la indeterminada x por a ésta verifica la ecuación P (a) = 0

Ejemplo: Para verificar si 2 es raíz del polinomio P(x) = 2 x^3 -2x^2 -28 x + 48 Se reemplaza a x por 2

P (2) = 2. 2^3 – 2 2^2 – 28. 2 + 48

= 2 . 8 – 2 . 4 - 56 + 48

= 16 - 8 – 56 + 48

= 64 – 64

P (2) = 0 Si es raíz

Actividad Nº 7: Efectuar las siguientes divisiones:

a) $-\frac{2}{9}x^7 : \frac{5}{6}x^4 =$

b) $-\frac{5}{8}x^{10} : \left(-\frac{15}{32}\right)x^4 =$

c) $(6 x^3 - 12 x^2 + 3 x) : (- 3 x) =$

d) $\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - 2x^2) : (\frac{1}{2}x) =$

e) $(x^4 - 15 x^3 + 9 x^2 - \frac{6}{5}x) : (-\frac{3}{5}x) =$

f) $(-6 x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 2x^2) : (-\frac{1}{3}x^2) =$

g) $\left(2x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 3x^4 - \frac{1}{6}\right) : \left(3x^2 - 2x\right) =$

h) $\left(2x^5 - 3x^3 + 6x\right) : \left(x^2 + x - 1\right) =$

i) $\left(5x^3 - 2x \ - 3\right) : \left(2x + 1\right) =$

j) $\left(x^3 + 2\right) : \left(2x - \frac{1}{2}\right) =$

Actividad Nº 8: Resolver aplicando regla de Ruffini:

a) $\left(2x^3 + 5x - 1\right) : \left(x - 2\right) =$

b) $\left(3x^3 - 2x^2 - 2\right) : \left(x + 1\right) =$

c) $\left(x^3 - 3x^2 - 2\right) : \left(x - 3\right) =$

d) $\left(-x^5 + 12x^3 - 15x^2 - 16\right) : \left(x + 4\right) =$

Actividad Nº 9: Calcular directamente el resto de las siguientes divisiones:

a) $\left(-2x \ + 5x^2 + 4\right) : \left(x + 3\right) =$

b) $\left(2x^3 - 4x^2 - 3\right) : \left(x - 1\right) =$

c) $\left(12x^4 - 5x^2 + 2x - 5\right) : \left(x - 2\right) =$

d) $\left(\frac{3}{2}x^3 + 4x^2 + 3\right) : \left(x + 2\right) =$

FACTOREO

Factorear o factorizar un polinomio entero de **n** términos, es expresarlo como un **producto** de otras expresiones algebraicas enteras.

A continuación veremos los distintos casos de factoreo:

- **Factor común**

Para factorear un polinomio que tiene factores comunes en todos sus términos se escribe el producto de todos los factores comunes, numéricos y literales, fuera de un paréntesis dentro del cual se escribe el polinomio formado por los cocientes de cada término del polinomio dado por el producto de los factores comunes extraídos. (Tener en cuenta, el número de términos dentro del paréntesis factor es igual al de términos del polinomio que factorea).

Ejemplos:

a) $4x^2 - 8x = 4x(x - 2)$

b) $-24x^4 + 12x^3 - 6x^2 = 6x^2(-4x^2 + 2x - 1)$

- **Factor común en grupos de igual número de términos**

Para factorear un polinomio que tiene grupos de igual número de términos con factores comunes en cada grupo se factorean dichos grupos, el resultado se factorea nuevamente con respecto al factor común que aparece entre paréntesis. Si el nuevo factor fuera común solo parcialmente, se efectúa un factoreo parcial que permitirá el factoreo final.

Ejemplos:

a) $7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 = (7x^5 + 14x) + (-5x^4 - 10)$

$7x(x^4 + 2) - 5(x^4 + 2)$

$(7x - 5)(x^4 + 2)$

b) $a^3-a^2+a-1 = (a^3-a^2) + (a - 1)$

$= a^2(a-1) + (a-1)$

$= (a^2+1) . (a - 1)$

c) $4x^3 + 8x^2 + 8x + 16 = 4(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)$

$= 4[(x^3 + 2x^2) + (2x + 4)] = 4[x^2(x + 2) + 2(x + 2)]$

$= 4(x + 2)(x^2 + 2)$

- **Diferencia de cuadrados**

  Para factorear un binomio que es diferencia de cuadrado se forma el producto de la suma de las bases de dichos cuadrados por la diferencia de las mismas.

Ejemplos:

a) $a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b)$

b) $x^2 - 25 = (x - 5) . (x + 5)$

c) $x^6 - 9 = (x^3 - 3) \cdot (x^3 + 3)$

d) $x^4 - 121 = (x^2 - 11) \cdot (x^2 + 11)$

- **Trinomio cuadrado perfecto**

Para factorear un polinomio que es trinomio cuadrado perfecto se eleva al cuadrado el binomio formado por la suma de las bases de los cuadrados perfectos que son términos del trinomio, previa identificación del doble producto de dichas bases con el término restante del trinomio.

Observaciones: Cuando el término igual al doble producto de las bases es negativo, uno de los términos del binomio es positivo, en tanto que el otro debe ser necesariamente negativo; si es positivo, ambos términos del binomio son positivos.

Ejemplos:

a) $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a).(x+a) = (x+a)^2$

b) $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a).(x-a) = (x-a)^2$

c) $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

d) $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$

- **Cuatrinomio cubo perfecto**

Para factorear un polinomio que es cuatrinomio cubo perfecto se eleva al cubo el binomio formado por la suma de las bases de los cubos perfectos que son términos del cuatrinomio, previa identificación de los triples productos de los cuadrados de cada una de dichas bases por la otra con los otros dos términos del cuatrinomio.

Observaciones: Si el cuatrinomio tiene dos términos positivos y los otros dos negativos, uno de los términos del binomio es positivo y el otro negativo. Si los cuatro términos son negativos, los dos términos del binomio son negativos

Ejemplos:

a) $a^6 + 12a^4y^3 + 48a^2y^6 + 64y^9 = (a^2 + 4y^3)^3$

b) $-125a^{12} - 15a^8 - \dfrac{3}{5}a^4 - \dfrac{1}{125} = \left(-5a^4 - \dfrac{1}{5}\right)^3$

c) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = (x+4)^3$

- **Suma o diferencia de Potencias de Igual grado**

A continuación veremos los diferentes casos de suma y diferencia de potencias de igual grado.

SUMA DE POTENCIAS DE IGUAL GRADO

a) La ***suma*** de dos potencias de igual grado **par** no es divisible por la suma de las bases de dichas potencias ni por su diferencia. En consecuencia tales binomios no son factoreables.

b) La ***suma*** de dos potencias de igual grado impar solamente es divisible por la suma de las bases de dichas potencias

Ejemplo: Suma de Potencias de Igual exponente par

$x^4 + 81$, no tiene raíces reales

Ejemplo: Suma de Potencias de igual exponente impar

$x^5 + 243 = x^5 + 3^5$. Se buscan las raíces

$x^5 + 3^5 = 0 \Rightarrow x = -3.$

Se resuelve por la regla de Ruffini $(x^5 + 3^5) : (x + 3)$

	1	0	0	0	0	243
-3		-3	9	- 27	81	-243
	1	- 3	9	- 27	81	0

Por lo tanto: $x^5 + 3^5 = (x+3)(x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81)$

DIFERENCIA DE POTENCIAS DE IGUAL GRADO

La **diferencia** de dos potencias de Igual grado **par**, es divisible tanto por la ***suma*** de las bases de dichas potencias como por la ***diferencia*** de las mismas.

Ejemplo: Diferencia de potencias de igual grado par

$x^4 - 81 = x^4 - 3^4$

Se buscan las raíces de: $x^4 - 81 = 0 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = -3$

Se aplica la regla de Ruffini

- $(x^4 - 81) : (x - 3)$

	1	0	0	0	-81
3		3	9	27	81
	1	3	9	27	0

$(x^4 - 81) = (x - 3).(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$.

- $(x^4 - 81) : (x + 3)$

	1	0	0	0	-81
-3		-3	9	-27	81
	1	-3	9	-27	0

$x^4 - 81 = (x + 3)(x^3 - 3x^2 + 9x - 27)$.

La ***diferencia*** de dos potencias de igual ***grado impar*** solamente es divisible por la diferencia de las bases de dichas potencias

Ejemplo: Diferencia de potencias de igual grado impar.

$x^3 - 125 = x^3 - 5^3$ se buscan las raíces

$- 5^3 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Se resuelve por la regla de Ruffini $(x^3 - 5^3) : (x - 5)$

	1	0	0	- 125
5		5	25	125
	1	5	25	0

Por lo tanto: $x^3 - 5^3 = (x - 5).(x^2 + 5x + 125)$

- **Factorizar ecuación de segundo grado**

Factorizar una ecuación de segundo grado consiste en primer momento obtener las raíces de la ecuación de segundo grado.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1).(x - x_2)$$

Ejemplo:

$$6x^2 - 10x + 4 = 6(x - 1).(x - 2/3)$$

Estrategias para Factorizar

Ciertos polinomios pueden factorearse aplicando sucesivamente varios de os casos de factoreo.

Generalmente se inicia el factoreo aplicando el factor común, si ello es posible, para facilitar el factoreo posterior del polinomio aplicando los caos restantes

Tener en cuenta la cantidad de términos

- ***Dos Términos:*** Intenta factorear como una diferencia de cuadrados o como una suma de diferencia de potencias de igual grado.
- ***Tres términos:*** Identifica si es un trinomio cuadrado perfecto, si lo es factorizalo como el cuadrado de un binomio.
- **Cuatro términos:** Identifica si es un cuatrinomio cubo perfecto, si lo es, factorizarlo como el cubo de un binomio.
- **Más de tres términos:** Si la cantidad de términos es un número no primo, analiza si se pueden agrupar, es decir, si se puede aplicar factoreo en grupo.
- Por último, trata de asegurarte si cada factor que queda, es primo.
- Para factorear un polinomio de segundo grado debemos calcular las raíce y queda:

$$\mathbf{a\,x^2 + bx + c = a\,(x - x_1).(x - x_2)}$$

Ejemplo: Factorear $x^7 + 2x^6y + x^5y^2 - x^3y^4 - 2x^2y^5 - xy^6$

Aplicando el primer caso se tiene:

$$x^7 + 2x^6y + x^5y^2 - x^3y^4 - 2x^2y^5 - xy^6 = x.\left(x^6 + 2x^5y + x^4y^2 - x^2y^4 - 2xy^5 - y^6\right)$$

Ahora se aplica factor común en grupos

$$= x.\left[\left(x^6 + 2x^5y + x^4y^2\right) + \left(-x^2y^4 - 2xy^5 - y^6\right)\right]$$

$= x.\left[x^4\left(x^2+2xy+y^2\right)-y^4\left(x^2+2xy+y^6\right)\right]$

$= x.\left[\left(x^2+2xy+y^2\right).\left(x^4-y^4\right)\right]$

$= x.(x+y)^2.\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)$

$= x.(x+y)^2.\left(x^2+y^2\right)(x-y).(x+y)$

Unidad 4 - Factoreo

Actividad Nº 10: Aplicar factor común:

a) 15b – 25 c + 10 d =

b) 2ab + 3a c – 4 a d =

c) 4 m^4 n^2- 8 m n^2 + 14 m^5 n^4 =

d) $\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}y=$

Actividad N º11: Factoricen los siguientes polinomios:

a) 4 x^3 – 2 x^2 + 6 x – 3 =

b) x^4 – x^3 + x – 1 =

c) x^6 + 2 x^5 + x^4 + 2 x^3 + 2 x + 4 =

d) 2 x^5 – x^4 + 6 x^3 – 3 x^2 + 8 x – 4 =

Actividad N º12: Expresen cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio:

a) 4 x^2 – 4 x + 1 =

b) x^6 + 4 x^3 + 4 =

c) x^2 + 3 x + $\frac{9}{4}=$

d) x^2 - $\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=$

Actividad N º13: Expresen cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio:

a) x^3 + 1 5 x ^{2} + 75 x + 125 =

c) $\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x-1=$

b) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 =$

d) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} =$

Actividad N º14: Factoricen las siguientes diferencias de cuadrados:

a) $4a^2 - 9b^4 =$

b) $\frac{4}{49}x^4 - \frac{1}{9}y^2 =$

c) $-0{,}81a^4b^2 + \frac{25}{4}m^6 =$

d) $36m^4 - 25n^2 =$

e) $0{,}25m^4n^2 - 0{,}09x^8y^6 =$

f) $\frac{121}{169}m^4 - \frac{49}{144}a^2 =$

Actividad N º15: Factoricen las siguientes sumas y diferencias de potencias de igual grado:

a) $x^7 + 128 =$

b) $x^5 - \frac{1}{32} =$

c) $y^3 + 27 =$

d) $y^4 - 81 =$

e) $x^6 + 64 =$

f) $x^6 - \frac{1}{64} =$

g) $x^3 - 1000 =$

h) $y^4 - 625 =$

Actividad N º16: Factoricen la ecuación de segundo grado:

a) $2x^2 + 5x - 3 =$

b) $\frac{1}{7}x^2 - x + \frac{10}{7} =$

c) $5x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{15}{8} =$

d) $\frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{7}{4} =$

Actividad N º17: Factoricen las siguientes expresiones, combinando los distintos casos de factoreo:

a) $x^2 + ax + bx + ab =$

b) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{25} =$

c) $4x^2y - 12xy^2 =$

d) $x^2 - x + \frac{1}{4} =$

e) $2x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 2 =$

h) $x^3 - 225x =$

i) $y^2 - 8y - y + 8 =$

j) $y^2 + 36 + 12y =$

k) $27x^3 - 54x^2 + 4x - 8 = =$

l) $\frac{14}{9}x^5 - \frac{35}{6}x^6 + \frac{21}{12}x^2 =$

f) $100y^2 - 81 =$

m) $ax^2 + ay - bx^2 - by =$

g) $x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 =$

n) $2x^2 + 50a^2 - 20ax =$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Una expresión algebraica es fraccionaria cuando tiene por lo menos una letra que figura como divisor o tiene exponente entero negativo.

Ejemplo: $-\dfrac{3a+2x}{5a-2x}$; $\dfrac{4}{x}$; $\dfrac{x^2-2x+4}{x+2}$

Simplificación de Expresiones algebraicas fraccionarias

Para simplificar una expresión fraccionara es necesario que existan factores comunes en el numerador y denominador, de lo contrario; la expresión racional es irreducible.

Ejemplo:

a) $\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+5)(x+2)}$ simplificamos los factores comunes $\dfrac{x-2}{x+5}$ (x ≠ - 2)

Las dos expresiones anteriores son equivalentes

b) $\dfrac{x+3}{x^2+3x}$ $\Rightarrow$ h (x) = $\dfrac{x+3}{x(x+3)}$ $\Rightarrow$ h(x) = $\dfrac{1}{x}$ (x ≠ -3)

Reducción de fracciones algebraicas a común denominador

Reducir dos o más fracciones algebraicas a común denominador es transformarlas en otra que tengan el mismo denominador y sean respectivamente iguales a las dadas.

Para reducir dos o más fracciones algebraicas a mínimo común denominador se transforman en otras, respectivamente iguales, que tengan por denominador el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores y por numeradores, los productos que se obtienen multiplicando los cocientes de dicho m.c.m., por cada denominador, por los numeradores respectivos

Ejemplo: Determinar el m.c.m. de los denominadores:

$$\frac{2}{x^2-y^2}; \quad \frac{y}{2x.(x+y)}; \quad \frac{x}{2y(x-y)};$$

$$x^2 - y^2 = (x+y.)(\text{x - y})$$

$2x.(x+y)$ el m.c.m = $2xy.(x+y.)(x - y)$

$2y.(x-y)$

Luego:

$$\frac{2}{x^2-y^2}=\frac{2.2xy}{2xy(x+y)(x-y)}=\frac{4xy}{2xy(x^2-y^2)}$$

$$\frac{y}{2x.(x+y)}=\frac{y.y(x-y)}{2xy(x+y)(x-y)}=\frac{y^2(x-y)}{2xy(x^2-y^2)}$$

$$\frac{x}{2y(x-y)}=\frac{x.x(x+y)}{2xy(x+y)(x-y)}=\frac{x^2(x+y)}{2xy(x^2-y^2)}$$

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGERAICAS FRACCIONARIAS

Para operar con expresiones racionales o fraccionarias, aplicaremos las mismas propiedades que se usan para operar con fracciones numéricas.

Suma o resta de fracciones algebraicas de igual denominador

Para sumar o restar dos o más fracciones de ***igual denominador*** se procede como en el caso de las fracciones numéricas, formando una fracción algebraica cuyo denominador es igual al de las fracciones dadas y cuyo numerador es la suma o resta los numeradores.

Ejemplo:

a) $$\frac{x}{x-2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{x+x+2}{x-2}=\frac{2x+2}{x-2}=\frac{2(x+1)}{x-2}$$

b) $$\frac{1}{x-1}-\frac{2x-1}{x-1}=\frac{1-(2x-1)}{x-1}=\frac{1-2x+1}{x-1}=\frac{2-2x}{x-1}=\frac{-2(x-1)}{x-1}=-2$$

Suma o resta de fracciones algebraicas de distinto denominador

Para sumar o restar dos o más fracciones de ***distinto denominador*** se reducen primero las fracciones a mínimo común denominador, luego se procede como en el caso de igual denominador.

Ejemplo:

a) $$\frac{x}{x-2}+\frac{3x-1}{x^2-2x}=\frac{x}{x-2}+\frac{3x-1}{x(x-2)}=\frac{x^2}{x(x-2)}+\frac{3x-1}{x(x-2)}=\frac{x^2+3x-1}{x(x-2)}$$

Se halla el m.c.m. y las fracciones equivalentes

Se factorizan los denominadores

Se suman los numeradores

b) $$\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x-1}=$$

$$\frac{x(x-1)}{(x+1).(x-1)}-\frac{2(x+1)}{(x-1).(x+1)}=\frac{x^2-x-2x-2}{(x-1).(x+1)}=\frac{x^2-3x-2}{(x-1).(x+1)}$$

Se halla el m.c.m. y las fracciones equivalentes

Se restan los numeradores

c) $$\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{(x+1).(x-1)}-\frac{x}{x+1}$$

Se factorizan los denominadores

$$=\frac{x+1}{2(x+1).(x-1)}+\frac{2.2}{2(x+1).(x-1)}-\frac{2x.(x-1)}{2(x+1).(x-1)}$$

Se halla el m.c.m. y las fracciones equivalentes

$$=\frac{x+1+4-2x.(x-1)}{2(x+1).(x-1)}=\frac{x+5-2x^2+2x}{2(x+1).(x-1)}=\frac{-2x^2+3x+5}{2(x+1).(x-1)}$$

$$=\frac{(-2x+5).\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}(x-1)}=\frac{-2x+5}{2(x+1)(x-1)}=\frac{-2x+5}{2(x-1)}$$

Se factoriza el numerador y se simplifica

Multiplicación de fracciones algebraicas

El producto de varias fracciones algebraicas es otra fracción algebraica que tiene por numerador el producto de los numeradores de las fracciones dadas y por denominador el producto de los denominadores.

En la práctica, se factorean el numerador y denominador de cada una de las fracciones dadas luego se simplifica y por último se resuelve.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}.\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x).R(x)}{Q(x).S(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^2}{x^2-4}.\frac{x+2}{3x^3-x}=\frac{x^2}{\cancel{(x+2)}.(x-2)}.\frac{\cancel{x+2}}{x(3x^2-1)}=\frac{x}{(x-2).(3x^2-1)}$$

División de fracciones algebraicas

El cociente de dos fracciones algebraicas fraccionarias es otra fracción algebraica que se obtiene multiplicando el dividendo por la fracción inversa del divisor.

En la práctica, se factorea el numerador y el denominador de las fracciones dadas y se efectúan todas las multiplicaciones posibles para obtener una fracción reducida a su más simple expresión

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}.\frac{S(x)}{R(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{x}{x-2}:\frac{x+2}{3x-1}=\frac{x}{x-2}.\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x.(3x-1)}{(x-2).(x+2)}$$

Recordar que tanto en la multiplicación como en la división se debe simplificar siempre que sea factible.

OPERACIONES COMBINADAS

Cualquier combinación de las cuatro operaciones con fracciones algebraicas da como resultado una expresión algebraica fraccionaria o entera.

Para resolver las operaciones combinadas se debe tener en cuenta la simplificación, multiplicación, división, suma y resta de fracciones algebraicas.

Recordar: Para resolver una operación combinada se debe:

- Separar en términos

- Efectuar las operaciones indicadas en cada término;
- Si es posible, simplificar e indicar la condición de posibilidad.

Ejemplo:

a) $$\frac{\frac{1}{x}-2}{\frac{x+1}{x^2}}-\frac{3x}{x+1}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}}{\frac{x+1}{x^2}}-\frac{3x}{x+1}=\frac{\frac{1-2x}{x}}{\frac{x+1}{x^2}}-\frac{3x}{x+1}$$

$$=\frac{1-2x}{x}.\frac{x^2}{x+1}-\frac{3x}{x+1}=\frac{x-2x^2}{x+1}-\frac{3x}{x+1}$$

$$=\frac{x-2x^2-3x}{x+1}=\frac{-2x^2-2x}{x+1}=\frac{-2x\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=-2x$$

$\forall\ x : x \neq 0 \wedge x \neq -1$

b) $$\frac{x^2+2x-3-x(x+3)}{\frac{x+3}{(x+4)^2}:\frac{4}{x+4}}=\frac{x^2+2x-3-x^2-3x}{\frac{x+3}{(x+4)^2}.\frac{x+4}{4}}=\frac{\cancel{-x-3}}{\frac{\cancel{x+3}}{4(x+4)}}=-\cancel{(x+3)}.\frac{4(x+4)}{x+3}=$$

$$-4(x+4)$$

$\forall\ x : x \neq -3 \wedge x \neq -4$ $\forall\ x : x \neq 0 \wedge x \neq -1$

Unidad 4 - Expresiones Algebraicas

Actividad N º 18: Marquen con una **x** las expresiones algebraicas fraccionarias:

a) $3x^2 - \frac{1}{2}x-5$ .... b) $5x^{-1}$ .... c) $\frac{x-2}{3}$ .... d) $(x+3) : x^5$ ....

Actividad N º 19: Simplifiquen las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$ b) $\dfrac{x^3-x^2}{x^3-2x^2+x}$

c) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-9x^2+27x-27}$ d) $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-25}$ e) $\dfrac{x^5-16x}{x^2-2x}$

Actividad N º20: Efectúen las siguientes sumas y restas de igual denominador:

a) $\dfrac{2x}{x+4}+\dfrac{8}{x+4}=$ b) $\dfrac{6x^2}{4x-8}-\dfrac{12x}{4x-8}=$

c) $\dfrac{2x-x^3}{x^2}-\dfrac{x(x+2)}{x^2}=$ d) $\dfrac{3x^3+1}{12x^2}+\dfrac{5x^3-1}{12x^2}=$

e) $\dfrac{1+x}{x^2-1}-\dfrac{4x^2}{x^2-1}+\dfrac{5x^2-x}{x^2-1}=$ f) $\dfrac{x}{2x-6}-\dfrac{3}{2x-6}=$

Actividad N º 21: Efectúen las siguientes sumas algebraicas:

a) $\dfrac{10}{x-2}+\dfrac{8}{x+2}=$ b) $\dfrac{12}{x^2+2x}+\dfrac{6}{x+2}-\dfrac{2}{x}=$

c) $\dfrac{x^2+6x+9}{x+3}+\dfrac{x^2-9}{x-3}=$ d) $\dfrac{8}{x^2-4}+\dfrac{x+4}{x+2}=$

e) $\dfrac{x+5}{x^2+10x+25}-\dfrac{x+4}{x^2-16}=$ f) $\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{2x}{1-2x}=$

g) $\dfrac{x^2+2}{(x-2).(x^4-1)}-\dfrac{3x}{x^5+2x^4-x-2}=$ h) $\dfrac{3x^3}{(x+2).(x-2)}-\dfrac{24x}{x^2-4}+\dfrac{48}{x^3-4x}=$

i) $\dfrac{2}{x-5}-\dfrac{10}{x^2-5}-\dfrac{1}{x+5}=$ j) $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}=$

k) $\dfrac{x}{3x-9}-\dfrac{6}{x^2-9}=$

Actividad N º 22: Efectúen las siguientes multiplicaciones y divisiones:

a) $\dfrac{2}{x^2-3x}\cdot\dfrac{x-3}{x}=$ b) $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x^2-2x+4}.(x^3+8).\dfrac{-8x}{2x^2+3x-2}=$

c) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}:\dfrac{2x^4+4x^3+8x^2}{2x^3+4x^2}=$

d) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-1}:\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}=$

e) $\dfrac{x^3-81x}{x^2-y^2}:\dfrac{x^2-81}{x^4-2x^2y^2+y^4}=$

f) $\dfrac{x^2-9}{2x+4}\cdot\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}.(x+1)=$

g) $\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-4x+4}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=$

h) $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x+1}{x^2+x}\cdot\dfrac{x^4-1}{x^2-1}=$

<u>Actividad N º 23:</u> Efectúen las siguientes operaciones combinadas:

a) $\dfrac{\dfrac{x^2+7x+6}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-1}}=$

b) $\dfrac{\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{2}{x^2-6x+9}}{\dfrac{x-2}{x-3}}=$

c) $\dfrac{\dfrac{x-7}{x^2-16}}{\dfrac{x^2-14x+49}{x+4}}-\dfrac{x+4}{\dfrac{x^2-16}{4}}=$

d) $\left(\dfrac{x}{\frac{1}{x}}:\dfrac{x^2}{\frac{1}{x^2}}\right)+\left(\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}}\right)=$

e) $\dfrac{\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{(x+1)^2}}{\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{(x-1)^2}}+\dfrac{x^2-1}{(x+1)^2}=$

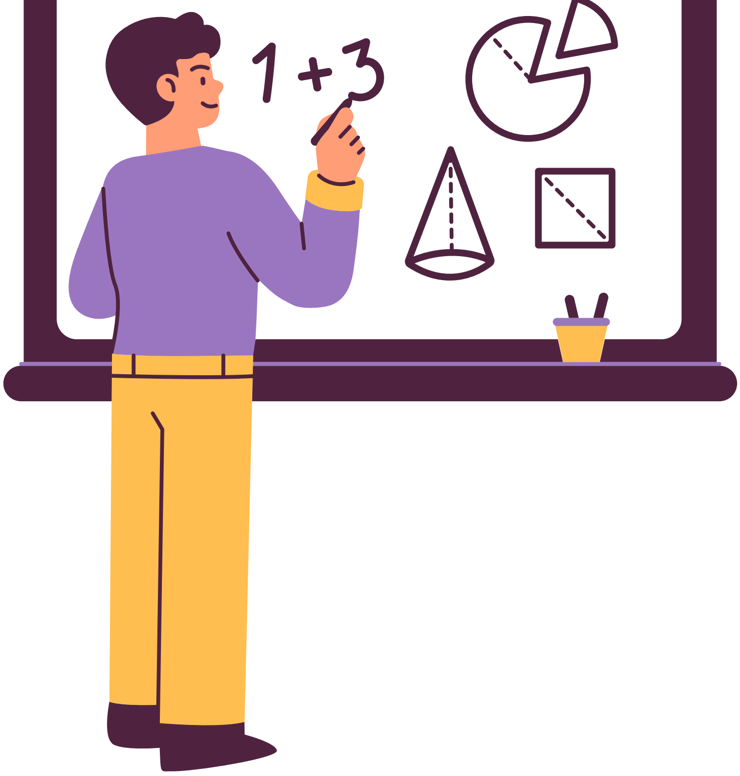
f) $\dfrac{x^2-25}{x^2-2x-3}\cdot\dfrac{x-3}{x^2+10x+25}-\dfrac{x+5}{x^2+6x+5}=$

Autoevaluación

Accede al siguiente código o link para realizar la Autoevaluación de la Unidad 4

Autoevaluación Unidad 4

UNIDAD 5



TRIGONOMETRÍA

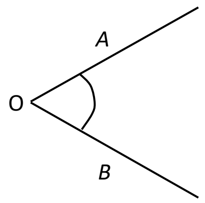
UNIDAD Nº5:

TRIGONOMETRÍA

Las funciones trigonométricas fueron creadas originalmente para describir las relaciones que hay entre los lados y los ángulos de los triángulos. No obstante, como suele suceder a menudo en matemáticas, se descubrieron otras aplicaciones para estas funciones. Las áreas técnicas y científicas dependen bastante de las funciones trigonométricas.

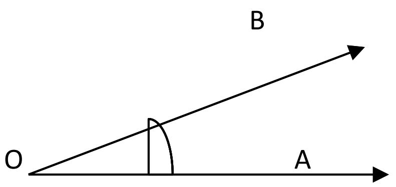
Iniciaremos nuestro estudio de la trigonometría con el análisis de los ángulos y las mediciones angulares. Luego definiremos las seis funciones trigonométricas para resolver problemas que impliquen triángulos rectángulos. A continuación, repasaremos nuestros conocimientos sobre ángulos y como medirlos.

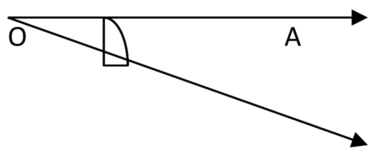
Generación de ángulos: En geometría se define ángulo $A\hat{O}B$ como la región del plano comprendida entre dos semirrectas (lados A y B), con un origen común denominado vértice (O)



El ángulo α es positivo si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y es negativo si se desplaza en sentido contrario.

Ejemplo:





Ángulo positivo

Ángulo negativo B

La semirrecta OA al hacerla girar alrededor del origen ”O” en sentido anti horario hasta ocupar la posición OB genera el ángulo α. La semirrecta OA puede girar cualquier número entero de revoluciones en sentido positivo o negativo, luego de la cual sus extremos quedan posicionados en el mismo punto. Esto significa que la posición del lado extremo del ángulo le corresponde una infinidad de ángulos (positivos y negativos).

Estos ángulos pueden obtenerse por la expresión:

$$\beta = \alpha + 360^{o} k \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \quad \text{con } k \in \mathbf{Z}$$

Ejemplo: Un ángulo de 130º tiene la misma posición de sus lados que: -230º , 490º, 850º, -590°, etc.

De acuerdo a lo que se dijo anteriormente, al ángulo α = 130º lo podemos expresar como que todos los ángulos enumerados están contenidos en la expresión:

$$\beta = 130 + 360^{o} k \quad \text{con } k \in \mathbf{Z}$$

Sistemas de Medición de Ángulos

Los ángulos suelen medirse en unidades tales como el radián, el grado sexagesimal o el grado centesimal. Las dos unidades más comunes son el grado sexagesimal y el radián. A continuación, veremos cómo convertir de grados sexagesimales a radianes y de radianes a grados sexagesimales.

Los sistemas de medición de ángulos más usados son:

a)Sistema Sexagesimal

b)Sistema radial o circular

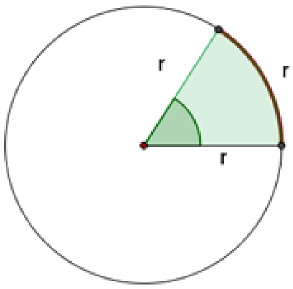
Sistema Sexagesimal

En el **sistema sexagesimal** la unidad de medida es el **grado,** el cual se define como la noventava parte de un ángulo recto y se lo nota por **1**°. Se llama **minuto** a la sesentava parte de un grado, denotándoselo por **1'**, y se llama **segundo** a la sesentava parte de un minuto, denotándoselo por **1''**. (Un ángulo recto = 90°)

$$\underbrace{\frac{1 \text{ ángulo recto}}{90} = 1^{o}\,(\text{un grado});}_{1 \text{ ángulo recto} = 90º} \quad \underbrace{\frac{1^{o}}{60} = 1'(\text{un minuto});}_{1^{o} = 60'} \quad \underbrace{\frac{1'}{60} = 1''(\text{un segundo})}_{1' = 60''}$$

Sistema Radial o circular

En el sistema circular, la unidad de medida de un ángulo es el **radián.** Un **radián** (rad) es la medida del **ángulo central de una circunferencia** cuya **longitud de arco** coincide con la **longitud de su radio**.



1 rad → 57° 17' 44,8''

360° → 2π radianes

180° → π radianes

En general: α° → $\frac{\pi}{180^\circ}\alpha \ rad$

Correspondencia entre sistema sexagesimal y circular

1 ángulo recto = 90º

1 ángulo recto = $\frac{\pi}{2}$ radianes (ángulos de 1 radián)

90º = $\frac{\pi}{2}$ radianes

$$1^o = \frac{\pi}{180^o} radianes \quad \Rightarrow \quad 1 radián = \frac{180^o}{\pi}$$

Dado un ángulo en grados sexagesimales, basta multiplicar su medida por $\frac{\pi}{180^o}$ para obtenerlo expresado en el sistema circular. Recíprocamente, dado un ángulo en el sistema circular, basta multiplicar su medida por $\frac{180^o}{\pi}$ para obtenerlo expresado en grados sexagesimales.

Ejemplo:

a) Expresar en sistema circular un ángulo de 36º.

$$36^o = \left(\frac{\pi}{180^o}.36^o\right)_{\text{radianes}} \Rightarrow 36^o = 0{,}62832$$

b) Expresar en grados sexagesimales un ángulo de 2,5 radianes.

$$2{,}5radianes = \left(\frac{180^o}{\pi}.2{,}5\right) = 143^o 14' 22''$$

Unidad 5 - Sistema sexagesimal Trigonometría

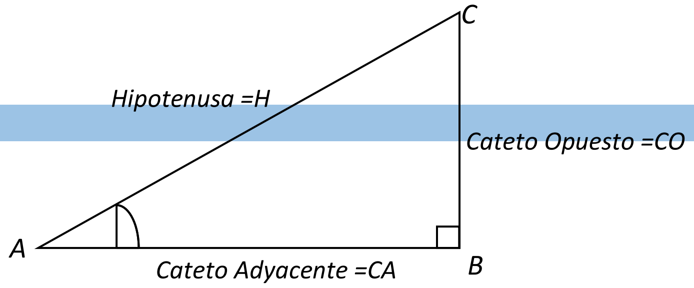
<u>Recuerda: Los ángulos se clasifican en convexos y cóncavos.</u>

Los **ángulos convexos** se clasifican a su vez en:

- Ángulo nulo 0°
- Ángulo agudo 0°< α < 90°
- Ángulo recto α = 90°
- Ángulo obtuso 90° < α < 180°
- Ángulo llano α = 1

Los **ángulos cóncavos** miden entre 180° y 360°. Por ejemplo: 190°, 240°, 340°

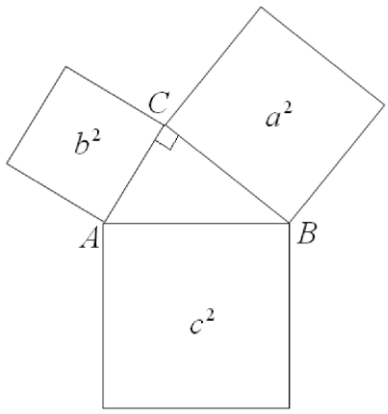
Triángulo rectángulo



Teorema de Pitágoras

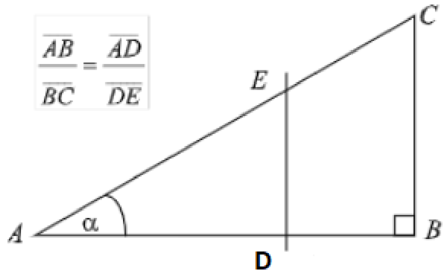
En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$$



Triángulos Rectángulos Semejantes

Si en un triángulo rectángulo ABC trazamos una paralela a uno de los catetos, formamos otro triangulo rectángulo ADE semejante al anterior (utilizando el criterio de semejanza), entonces notemos que la razón entre los catetos del triángulo ABC es equivalente con la razón de los catetos del triángulo ADE, es decir:



Relaciones Trigonométricas

Las relaciones trigonométricas son las razones entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante que se abrevian como: **sen, cos, tg, cotg, sec y cosec,** respectivamente.

- Seno del ángulo α : es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$sen(\hat{\alpha}) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{B}{A}$$

- Coseno del ángulo α : es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$\cos(\hat{\alpha}) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{C}{A}$$

- Tangente del ángulo α : es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$tg(\hat{\alpha}) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{B}{C}$$

- Cotangente del ángulo α : es el cociente entre el cateto adyacente y el cateto opuesto.

$$\cot(\hat{\alpha}) = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{C}{B}$$

- Secante del ángulo α : es el cociente entre hipotenusa y cateto adyacente.

$$\sec(\hat{\alpha}) = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{A}{C}$$

- Cosecante del ángulo α : es el cociente entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

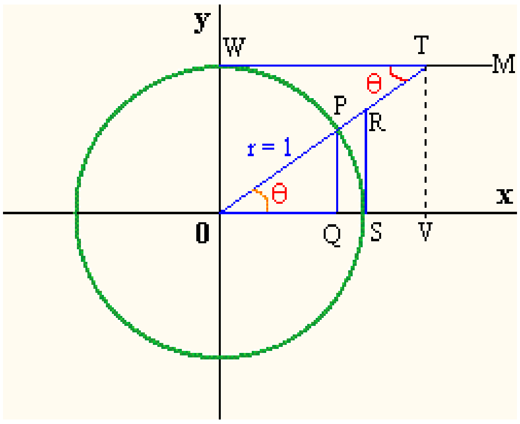
$$\cos ec(\hat{\alpha}) = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{A}{B}$$

Importante: Cuando se trabaja con calculadora debido a que, como hemos visto hay distinto modos de medir un ángulo, si se trabaja en **grados** la máquina debe estar en modo **"DEG"**, y si se trabaja en **radianes** la máquina debe estar en modo **"RAD"**.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UNA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia goniométrica, trigonométrica o unitaria es una circunferencia de radio unitario, con su centro en el origen (0,0) de un sistema de coordenadas cartesianas.

En la **circunferencia goniométrica los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes** que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.



A continuación vamos a encontrar las líneas trigonométricas en el 1° cuadrante (la forma de obtener las líneas trigonométricas en los otros tres cuadrante es similar)

Los triángulos $\overset{\triangle}{OQP}$, $\overset{\triangle}{OSR}$, $\overset{\triangle}{TWO}$ y $\overset{\triangle}{OVT}$ son semejantes: los 4 son rectángulos y tienen un ángulo agudo en común (θ). La consecuencia inmediata de esto es que las razones entre dos de los lados de un triángulo cualquiera es igual a la razón de los lados homólogos en los otros 2 triángulos. Teniendo esto presente, y el hecho de que el radio del círculo mide 1, vamos a deducir las líneas trigonométricas:

Por ejemplo: $$sen\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{r} = \frac{PQ}{1} = PQ$$

De igual modo podríamos hacer para obtener las demás líneas trigonométricas:

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{r} = \frac{OQ}{1} = OQ$$

Por semejanza de triángulos, comparando OPQ y ORS tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{PQ}{OQ}=\dfrac{RS}{OS}\\ tg\theta=\dfrac{PQ}{OQ}\end{array}\right\}\Rightarrow tg\theta=\frac{RS}{OS}=\frac{RS}{r}=\frac{RS}{1}=RS$$

Con igual razonamiento se podría obtener los otros segmentos correspondientes a las líneas trigonométricas de: cotg θ, sec θ y cosec θ

Atención: A menudo, cuando se resuelven problemas de trigonometría, es necesario utilizar el ***ángulo de elevación***, el cual se define como el ángulo medido desde el horizonte al que una persona tendría que elevar su línea de visión para ver un objeto. De manera semejante, el ***ángulo de depresión***, que es el ángulo medido desde el horizonte al que una persona tendría que bajar su línea de visión para ver un objeto.

En la siguiente figura se ven los dos ángulos el de elevación y el ángulo de depresión:

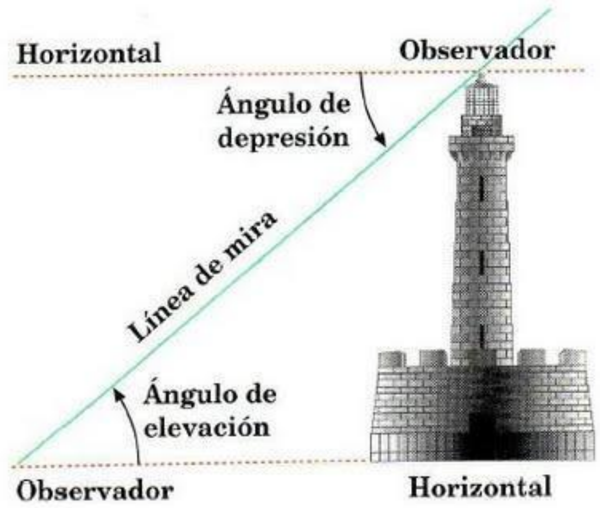


Tabla de razones Trigonométricas

θ	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**
sen	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**	**-1**
cos	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**-1**	**0**
tg	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	**∞**	**0**	**- ∞**

"No hemos definido nada para los ángulos cuadrantales (0°, 90°, 180° y 270°)"

Signos de las líneas

De acuerdo a lo que hemos visto de las líneas de los ángulos correspondientes a los cuatro cuadrantes, podemos establecer cuales son los signos que les corresponden a las líneas trigonométricas según el cuadrante en que se hallen. Podemos establecer cuáles son los signos que corresponden a las líneas trigonométricas según el cuadrante en el que se halle θ.

- Si θ está en el I cuadrante: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
- Si θ está en el II cuadrante: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
- Si θ está en el III cuadrante: $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$
- Si θ está en el IV cuadrante: $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

Importante

A continuación señalaremos que **sen** α **y cos** α toman todos los valores comprendidos entre **1 y -1** incluidos estos.

La **tg** α **y cotg** α pueden tomar cualquier valor real.

En cambio la **sec** α **y cosec** α, toma valores menores o iguales que -1 o valores mayores o iguales a 1.

Resolución de Triángulos rectángulos

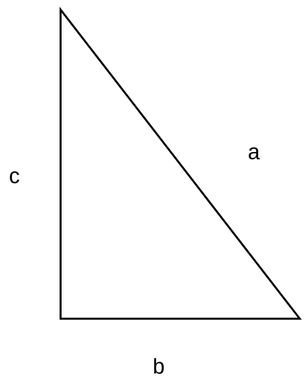
Para resolver un triángulo cualquiera es preciso conocer tres de sus elementos, entre los cuales figure un lado; pero cuando el triángulo es rectángulo, como un elemento está tácitamente dado (un ángulo recto) basta conocer los otros dos elementos, donde uno de ellos debe ser un lado.

Los casos de resolución que pueden presentarse son:

- Dados: la hipotenusa y un ángulo agudo.
- Dados: un cateto y un ángulo agudo.
- Dados: la hipotenusa y un cateto.
- Dados: los dos catetos.

Relaciones que vinculan los lados de un triángulo rectángulo

Las relaciones están dadas por el Teorema de Pitágoras que dice “en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Para resolver triángulos hay que tener en cuenta que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°. Por lo tanto, en un triángulo rectángulo, conociendo un ángulo agudo α se puede encontrar el otro ángulo β, realizando la diferencia de 90° - β.

Cuando los triángulos no son rectángulos podemos aplicar el Teorema del Coseno o el Teorema del Seno. A continuación se presenta una lista de las medidas en grados y en radianes de algunos ángulos que son usados comúnmente. Usted aprenderá a sentirse seguro al usar medidas tanto en grados como en radianes para estos ángulos.

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

Unidad 5 - Triángulo Rectángulo Razones

Actividad N°1: Convierta cada medida angular de grados a radianes:

a) 90° b) 45° c) 135° d) 225°

e) 180° f) -60° g) -235° h) 360°

Actividad N°2: Convierta cada medida angular de radianes a grados:

a) π b) $\frac{3}{4}\pi$ c) $-\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{5}{6}\pi$ f) 1,5 rad g) 4 rad h) -2,5 rad

Actividad Nº 3: Sabiendo que $\cos\alpha = 0{,}63$. Calcular $sen\alpha$ y $tg\alpha$.

Actividad Nº 4: Sabiendo que $tg\alpha = 2$. Calcular $sen\alpha$ y $\cos\alpha$.

Actividad Nº 5: ¿Puede existir un ángulo cuyo coseno valga 2? Justificar.

Actividad Nº 6: Calcular la tangente del ángulo α si:

$a)\ \text{sen}\alpha = 0{,}6$ b) $\cos\alpha = -0{,}3$

Actividad Nº 7: Completa la siguiente tabla y escribir los signos que correspondan:

	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
$sen\alpha$				
$\cos\alpha$				
$tg\alpha$				

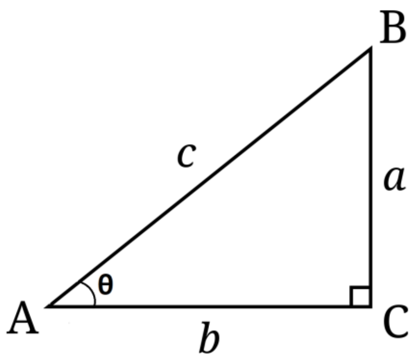
Actividad Nº 8: Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: Justificar

a) La tangente de un ángulo perteneciente al tercer cuadrante vale (-0,5). ……..

b) La cosecante de un ángulo perteneciente al tercer cuadrante vale (-3/2)………

c) La secante de un ángulo perteneciente al primer cuadrante vale (3/4)…………

Actividad N°9: Encuentre las funciones trigonométricas del ángulo θ para los lados indicados del triángulo rectángulo ABC



a) a = 5 , c = 12

b) a = 8 , b = 5

c) a = 14 , c = 20

d) b = 4,5 c = 6,2

Actividad N°10: Sea θ un ángulo de un triángulo rectángulo, dada la función trigonométrica, encuentre los valores de las otras funciones trigonométricas.

a) $\cos\theta = \frac{8}{17}$ b) $sen\theta = \frac{3}{4}$ c) $\tan\theta = 2{,}5$

d) $sen\theta = \frac{2}{5}$ e) $\cos\theta = 0{,}686$ f) $\tan\theta = \frac{22}{20}$

Actividad N°11: Utilice calculadora para determinar el valor de la función trigonométrica (tenga en cuenta el modo en que está la calculadora).

a) cos 28° 5´10´´ b) sen 45 ° c) tan 75° 16´

d) sen 0,25 rad e) cos 0,5 rad f) tan 0,65 rad

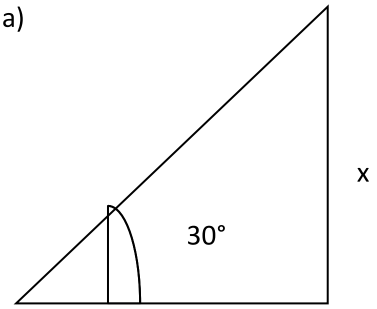
Actividad N°12: Dadas las siguientes funciones trigonométricas encuentre los ángulos agudos correspondientes:

a) sen θ = 0,732 b) cos θ = 0,049 c) tan θ = 0,839

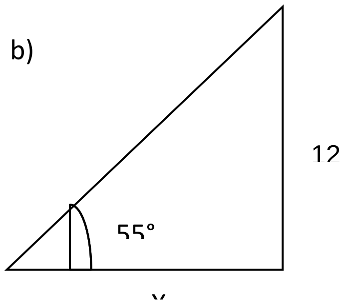
d) tan θ = 0,537 e) sen θ = 0,285 f) cos θ = 0,5

Actividad N°13: Dados los siguientes triángulos determine el lado marcado con x:

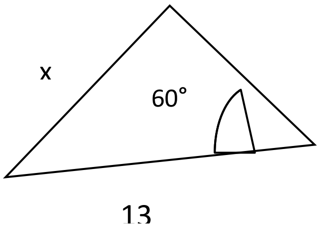
a)



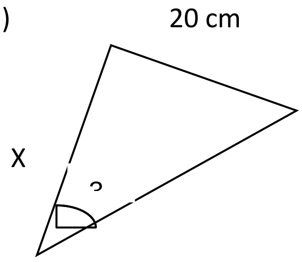
b)



c)



d)



Actividad N°14: Una persona está parada a 50 m de la base de una torre. El ángulo de elevación hasta la cima de la torre es de 76°.¿cuál es la altura de la torre?

Actividad N°15: Dos personas están a bordo de un globo que se eleva con aire caliente. Una de ellas puede observar desde la góndola del globo cuando pasa por un extremo de un cuerpo de fútbol. El ángulo de depresión hasta el otro extremo del terreno de fútbol mide 53 °. Esta persona sabe que la longitud del campo, incluyendo las zonas de los extremos, mide 150 m, ¿a qué altura pasó el globo sobre el terreno de fútbol?

Actividad N°16: Desde un punto sobre el suelo a 500 pies de la base de un edificio, se observa que el ángulo de elevación hacia la parte superior del edificio es de 24° y que el ángulo de elevación hasta la parte superior del asta bandera del edificio es de 27°. Determine la altura del edificio y la longitud del asta bandera.

Actividad N°17: Desde la parte superior de un faro de 200 pie de altura, el ángulo de depresión hasta un barco sobre el océano es de 23°,¿a qué distancia está el barco a la base del faro?

Actividad N°18: Un hombre está tendido sobre la playa, haciendo volar una cometa. Sujeta el extremo de la cuerda de la cometa al nivel del piso y estima que el ángulo de elevación de la cometa es de 50°. Si la longitud de la cuerda es de 450 pies, ¿a qué altura está volando la cometa sobre el nivel del piso?.

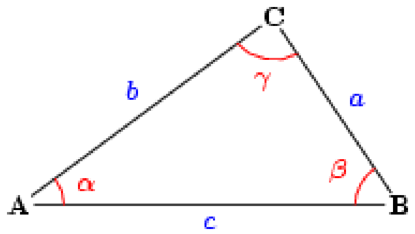
Actividad N°19: Un árbol de 56 pies de altura proyecta una sombra de 43 pies de largo, ¿cuál es el ángulo de elevación del sol en ese momento?

Ejercicio N°20: La luz sobre la parte superior de una torre tiene un ángulo de elevación de 53,7 ° cuando una persona está a 150 a pies de la base de la torre, ¿a qué altura está la luz?

Teorema del coseno

El **teorema del coseno** es un teorema de geometría de los triángulos comúnmente utilizado en trigonometría. Es la generalización del Teorema de Pitágoras en los triángulos no rectángulos: relaciona el tercer lado de un triángulo con los dos primeros y con el coseno del ángulo formado por estos dos lados.

Sea un triángulo ABC, en el cual utilizamos las notaciones habituales expuestas en la figura por una parte α, β y γ para los ángulos y, por otra parte, *a*, *b* y *c* para los lados respectivamente opuestos a estos ángulos. Entonces, el teorema del coseno se enuncia de la siguiente manera:

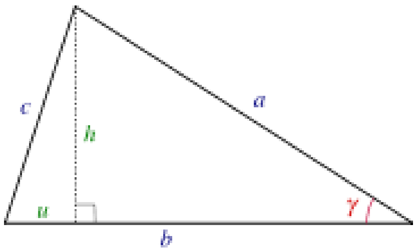


Notaciones habituales en un triángulo cualquiera.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Notemos que el Teorema del Coseno es equivalente al Teorema de Pitágoras cuando el ángulo γ es recto. Hay dos casos a considerar: cuando *c* es un lado de un ángulo obtuso y cuando no lo es.

Primer caso: *c* es adyacente a dos ángulos agudos.



Caso 1: c es adyacente a dos ángulos agudos. De acuerdo a la figura el Teorema de Pitágoras establece que

$$c^2 = h^2 + u^2$$

Consideremos la figura adjunta. Combinando ambas ecuaciones:

$$h^2 = a^2 - (b - u)^2$$

Usando la definición de coseno, se tiene que:

$$c^2 = u^2 + a^2 - b^2 + 2bu - u^2 = a^2 - b^2 + 2bu$$

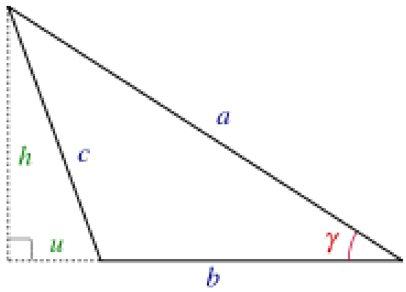
$$\cos(\gamma) = \frac{b-u}{a}$$ por lo tanto $u = b - a\cos(\gamma)$

Sustituimos en la expresión para c^2 y simplificamos:

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2b[b - a\cos(\gamma)]$$

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2b^2 - 2b.a\cos(\gamma)$$

Segundo caso: *c* es adyacente a un ángulo obtuso.



Caso 2: *c* es adyacente a un ángulo obtuso.

Consideremos la figura adjunta. El teorema de Pitágoras establece que:

$$c^2 = h^2 + u^2$$

$$h^2 = a^2 - (b+u)^2$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos

$$c^2 = u^2 + a^2 - b^2 - 2bu - u^2 = a^2 - b^2 - 2bu$$

Usando la definición de coseno, se tiene:

$$\cos(\gamma) = \frac{b+u}{a}$$

Y por tanto:

$$u = a\cos(\gamma) - b$$

Sustituimos en la expresión para c^2 y simplificamos:

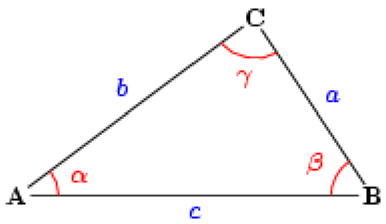
$$c^2 = a^2 - b^2 - 2b[a\cos(\gamma) - b]$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

y esto concluye la demostración.

Es importante notar, que si se considera a *u* como un segmento dirigido, entonces sólo hay un caso y las dos demostraciones se convierten en la misma.

Teorema del seno



Expresa $\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{b}{sen\beta} = \dfrac{c}{sen\gamma}$

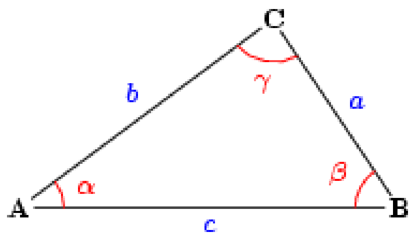
Ejemplo: Determinar a si c = 20 cm $\alpha = 45^0 \quad \gamma = 60^0$

Entonces $\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{c}{sen\gamma} \Rightarrow a = \dfrac{c\,.\,sen\alpha}{sen\gamma}$ a = $\dfrac{20cm\,.\,sen\,45^0}{sen\,60^0} =$ 16,33 cm

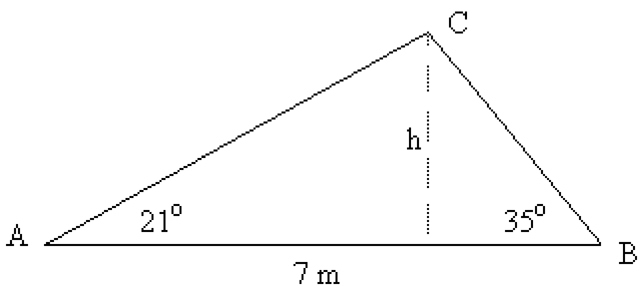
Unidad 5 - Triángulo Oblicuángulo

Ejercicio Nº 21: En un triángulo oblicuángulo encuentre los valores de los lados **b** y **c**, y el ángulo **α**, sabiendo que: el lado **a** = 7 cm, el ángulo β = 60º y γ =45º

Ejercicio Nº 22: Resolver el siguiente triángulo oblicuángulo, donde **a = 4 cm**, **b = 5 cm** y el ángulo β **= 30º.**

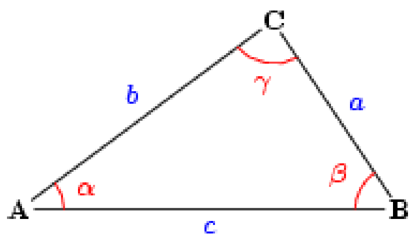


Ejercicio Nº 23: Encontrar el área del siguiente triángulo:



Ejercicio Nº 24:

Encontrar el lado faltante si **a = 5 cm**, **c = 7 cm** y el ángulo $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{60}°$



Ejercicio Nº 25: Un barco navega 40 Km hacia el norte y luego 70 km formando un ángulo de 37º hacia el noreste. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

Ejercicio Nº 26: Un topógrafo mide los tres lados de una chacra y obtiene 114, 165 y 257 m. ¿Cuánto mide el mayor ángulo del triángulo?

Identidades Trigonométricas

En la práctica es frecuente hallar problemas que incluyen dos o más ángulos y que comúnmente están relacionados con operaciones aritméticas (suma o resta de dos ángulos, múltiplos o fracciones de ángulos, etc.). Encontrar los valores de las funciones trigonométricas en estos casos es todo un arte; en su desarrollo entran en juego el manejo y conocimiento de las identidades trigonométricas.

Recordemos que: una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que puede involucrar funciones trigonométricas o de otro tipo, y que puede o no tener solución; por el contrario una identidad es un caso particular de ecuación que es cierta para todos los valores de la variable.

Las siguientes identidades se conocen como identidades pitagóricas:

- $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$
- $1+\text{cotg}^2\,\alpha = \text{cosec}^2\,\alpha$

Otras identidades a tener en cuenta:

1. $\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \text{sen}\,\beta$
2. $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \text{sen}\,\beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{sen}\,\beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{sen}\,\beta$
5. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha . \tan\beta}$
6. $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha . \tan\beta}$
7. $\text{sen}(2\alpha) = 2\,\text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$
8. $\cos(2\alpha) = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\alpha$

Ejercicio Nº 27: Demostrar las siguientes identidades:

a) $\dfrac{\cot\alpha}{\cos ec\alpha.} = \dfrac{1}{\sec\alpha}$

b) cosα . cscα . tanα = 1

c) $\dfrac{1-sen\alpha}{\cos\alpha.} = \dfrac{\cos\alpha}{1+sen\alpha}$

d) $\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{sen(2\alpha).} = \tan\alpha$

Autoevaluación

Accede al siguiente código o al link para realizar la Autoevaluación de la unidad 5.

Autoevaluación Unidad 5