UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS

[redacted]

FICA Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias

Matemáticas

Para las carreras de:

- Licenciatura en Bromatología
- Bromatología
- Técnico Universitario en Mantenimiento Industrial

Equipo de Cátedra:

Profesor Responsable: Mag. Jorge Leandro Leporati

Prof. Colaborador: Esp. Fernando Javier Quiroga Villegas

Auxiliares: CPN Analía Curay Fernandez

2025

2025

Guía de Aprendizaje de Números Reales

Lic. Esp. Fernando Javier Quiroga Villegas

Guía de Aprendizaje de Números Reales

EDICIÓN DIGITAL

Villa Mercedes - San Luis, Republica Argentina, Diciembre 2024.

Guía de Aprendizaje de Números Reales

EDICIÓN DIGITAL

Lic. Esp. Fernando Javier Quiroga Villegas

Fernando Javier Quiroga Villegas, docente efectivo de la Universidad Nacional de San Luis de la asignatura Matemática para las carreras de Técnico Universitario en Mantenimiento Industrial, Licenciatura en Bromatología de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias y de Técnico Universitario en Gestión Financiera de la Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales de la Universidad Nacional de San Luis.

Contenido

Introducción

El Curso de Formación en Matemáticas tiene por objeto mejorar la comprensión de distintos temas tratados en el nivel medio/polimodal e introducir algunos conceptos que no han sido analizados antes y que son fundamentales para mejorar la comprensión de los contenidos que se desarrollaran en las primeras asignaturas de las carreras que han elegido. Teniendo en cuenta todo lo expuesto te invitamos a trazar un camino por cuatro unidades que consideramos representan los contenidos mínimos que te ayudarán a sortear futuros obstáculos en el cursado de las primeras asignaturas de la carrera, estos son:

- *Números Reales,*
- *Expresiones Algebraicas,*
- *Ecuaciones, y*
- *Trigonometría.*

Te proponemos iniciar un recorrido, primero, a través de los distintos conjuntos numéricos, sus propiedades y operaciones.

Comenzamos…

Números Naturales

Un número natural es cualquiera de los números: 1, 2, 3, 4, etc. que se pueden usar para contar los elementos de un conjunto.

- Reciben ese nombre porque fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar objetos de la naturaleza.
- Este conjunto numérico se denota con la letra **N**.

Características

Algunas características de los números naturales:

- ***Es un conjunto infinito.***
- ***Es ordenado: Tiene primer elemento, pero No tiene último elemento.***
- ***Todo número natural tiene sucesor.***
- ***Todo número natural salvo el uno tiene antecesor.***
- ***Entre dos números naturales consecutivos, no existe otro número natural, por eso se dice que el conjunto es discreto.***

Múltiplos y divisores de un número natural

La multiplicación da origen a dos relaciones entre los números naturales, ejemplo:

$$9.3 = 27$$

27 es múltiplo de 9 y 9 es divisor de 27

27 es múltiplo de 3 y 3 es divisor de 27

- ***La relación múltiplo y divisor son relaciones inversas.***

Ahora estamos en condiciones de definir múltiplo:

- a ***es múltiplo de*** b ***si es posible encontrar un número natural*** k ***, tal que se cumple:***

- $$a = k.b$$

Si a es múltiplo de b, la división de $a:b$ tiene resto cero, por lo tanto:

a *es múltiplo de* b.

b *ese factor de* a.

Ejemplo:

$$2.3 = 6$$

6 es múltiplo de 3

3 es factor de 6

- Recordemos que los múltiplos de un número son todos aquellos números que resultan de multiplicar el número por cada uno de los números naturales.

Así de 8 son múltiplos: 8,16,24,32,40,48,…

Propiedades:

- El 0 es múltiplo de todos los números pues $0.a = 0$.
- Todo número es múltiplo de sí mismo pues $a.1 = a$.

Divisores

Ahora definimos divisor de un número natural:

- b ***es divisor de*** a ***si se cumple:***
- $b : a = k$ y $k.a = b$

"Es decir el resto de esta división es cero"

Por lo tanto, es indistinto decir que:

- b divide a a
- a es divisible por b

Ejemplo:

- $6:3=2$

3 divide a 6

6 es divisible por 3

Propiedades:

- El 1 es divisor de todos los números pues $a:1 = a$ y su resto es cero.
- Todo el número salvo el 0, son divisores de sí mismos, pues $a:a = 1$ y su resto es cero.

Recordemos que de 36 son divisores, 1,2,3,6,12,36.

Para saber si un determinado número es divisor de otro basta con dividir el número por su supuesto divisor y verificar que el resto es cero, caso contrario no es un divisor del número dado.

Ejemplo:

¿16534 es divisor de 3?.
Efectuamos la división: 16534 : 3 = 5511 y su resto es distinto de cero por lo tanto no es divisor de 3.
Pero 16534 es divisor de 2. Al dividir 16534 : 2, el cociente es 8267 y el resto es cero.

Criterios de Divisibilidad

- ***Todo número es divisible por 2 si termina en 0,2,4,6,8; es decir, si es par.***
- ***Todo número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.***
- ***Todo número es divisible por 4 si sus dos últimas cifras son ceros o múltiplo de 4.***
- ***Todo número es divisible por 5 si su última cifra es 0 ó 5.***
- ***Todo número es divisible por 6 si lo es a la vez por 2 y por 3.***
- ***Todo número es divisible por 7 si el número que se obtiene al separar el último dígito, multiplicarlo por 2 y restarle el número que queda, es múltiplo de 7.***
- ***Todo número es divisible por 8 si sus tres últimas cifras son ceros o terminan en múltiplo de 8.***
- ***Todo número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de nueve.***
- ***Todo número es divisible por 10 si su última cifra es 0.***

Ejemplos:

- *El número 98 es divisible por 7 porque se separa el 9 del 8, ahora se multiplica 8 x 2 = 16 y se resta 16 –9 = 7*

- *245 es divisible por 7, porque se separa el último dígito, el 5; queda 24. Ahora se multiplica 5 x 2 = 10 y se resta 24 – 10 = 14.*
- *1000 es múltiplo de 8 porque sus 3 últimas cifras son ceros. También es múltiplo de 2, porque termina en número par. Es múltiplo de 4 porque sus dos últimas cifras son ceros. Es múltiplo de 5 porque termina en 0. El múltiplo de 10 porque su última cifra es 0.*

Números Primos y compuestos

- ***Un número es primo si los únicos divisores que posee son el 1 y él mismo.***
- ***Un número es compuesto si posee otros divisores además del 1 y él mismo.***
- ***El 0 y el 1 son números especiales que no se los consideran ni primos ni compuestos.***

Ejemplos:

- *2,3,5,7,11,13,17,19 son números primos porque los únicos divisores que poseen son el 1 y ellos mismos.*
- *4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 son números compuestos porque tienen como divisores a 1, ellos mismos y al 2.*
- *9, 15, 18 son números compuestos porque tienen como divisores a 1, ellos mismos y al 3.*
- *Los números primos entre dos y 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.*

Máximo común divisor

- ***El máximo común divisor de dos o más números naturales es el mayor divisor común posible de todos ellos.***

  - Para el cálculo del máximo común divisor de dos o más números se pueden encontrar los divisores comunes y escoger el máximo divisor común entre los números dados o descomponer los números en factores primos y tomar los factores comunes con su menor exponente.

Ejemplos:

Calcular el máximo común divisor de los números 36 y 24:

Los divisores de 36 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 36.

Los divisores de 24 son: 1, 2 ,3 ,4 ,6 ,8 ,12 ,24.

Como podemos observar los divisores comunes a ambos son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12.

El mayor de ellos es 12, al que llamamos máximo común divisor por ser el mayor de los divisores comunes y lo denotamos así: mcd(36,24) = 12

- *De otra forma vamos a descomponer a 36 y a 24 en factores primos:*

36	2
18	2
9	3
3	3
1	
$36=2^2.3^2$	

24	2
12	2
6	2
3	3
1	
$24=2^3.3$	

Para encontrar el m.c.d. (36,24) debemos realizar el producto de los factores que son comunes a ambas descomposiciones tomándolos con el menor exponente con que figuran. Por lo tanto:

$$m.c.d.(36,24)=2^2.3=12$$

Mínimo común múltiplo

- ***El mínimo común múltiplo de dos o más números naturales es el menor número natural (distinto de cero) que es múltiplo de todos ellos.***

  - Para el cálculo del mínimo común múltiplo de dos o más números se pueden encontrar los primeros múltiplos de cada número y escoger el menor de ellos o descomponer los números en factores primos y se toman los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplos:

Calcular el mínimo común múltiplo de los números 36 y 24:

Los múltiplos de 36 son: 36, 72, 108, 144, 180, 216, 252 …..

Los múltiplos de 24 son: 24, 48, 72,96, 120, 144, 168, ….

Como podemos observar los divisores comunes a ambos son: 72, 144, entre otros.

El menor de ellos es 72, al que llamamos mínimo común múltiplo por ser el menor de los múltiplos comunes y lo denotamos así:

$$mcm(36,24)=72$$

De otra forma vamos a descomponer a 36 y a 24 en factores primos:

36	2
18	2
9	3
3	3
1	
$36=2^2.3^2$	

24	2
12	2
6	2
3	3
1	
$24=2^3.3$	

Para encontrar el mcm(36,24) debemos realizar el producto de los factores que son comunes y no comunes a ambas descomposiciones tomándolos con el mayor exponente con que figuran. Por lo tanto:

$$mcm(36,24)=2^3.3^2=72.$$

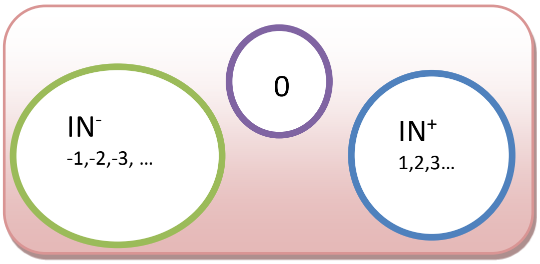
Una forma de comprobar si hemos calculado bien el mcd y el mcm de un par de números dados (a,b) es verificar, que se cumpla la siguiente igualdad:

$$a.b=mcd(a,b).mcm(a,b)$$

Números Enteros

Los números enteros están formados por los números naturales, el cero, y los números negativos.

*Los números enteros se denotan con la letra **Z**.*



Algunas características de los números enteros:

- ***Es un conjunto infinito.***
- ***Es un conjunto ordenado: No tiene primer elemento.***
- ***No tiene último elemento.***
- ***Todo número entero tiene sucesor.***
- ***Todo número entero tiene antecesor.***
- ***Entre dos números enteros consecutivos, no existe otro número entero, por eso se dice que el conjunto es discreto.***

Recuerde: ***El 0 no es positivo ni negativo es un número neutro***.

Números Racionales

Nos surge un nuevo problema los números enteros nos sirven para contar cantidades positivas y negativas, pero no nos sirven para medir, por ejemplo, la cantidad de metros que tiene una determinada estructura. Necesitamos ampliar nuevamente el campo numérico y necesitaremos de números que nos permitan medir, es decir, números que representen partes de la unidad.

*El conjunto de los números racionales está constituido por el conjunto de los números enteros y por el conjunto de todas las fracciones y lo denotamos con la letra **Q**.*

Una fracción o número racional es el que se puede expresar como $\frac{a}{b}$ que es el cociente de dos números enteros a y b, con $b \neq 0$, siendo a el numerador y b el denominador.

Ejemplo:

Los números enteros pertenecen a ***Q*** *pues se pueden expresar como fracciones, por ejemplo* $2 \in$ ***Q*** *y puede ser escrito como* $\frac{2}{1}$.

$-8 \in Z$ *y también pertenece a* ***Q****, por ello lo podemos escribir como fracción:* $-\frac{8}{1}$.

$17 \in$ ***N****, y* ***N*** *es incluido en* ***Z****,* ***Z*** *está incluido en* ***Q****, por lo tanto 17* $\in$ ***Q***.

Recuerde: ***El denominador de cualquier número natural y de cualquier número entero es 1.***

Características de ***Q****:*

- ***Es un conjunto infinito.***
- ***Es un conjunto ordenado.***
- ***No tiene primer ni último elemento.***
- ***Todo número racional tiene sucesor y antecesor.***
- ***Q es un conjunto denso (entre dos números racionales existen infinitos números racionales).***

Así como en el conjunto ***Z*** *de los números enteros cada número tiene un siguiente o sucesor (el siguiente al 7 es el 8, el siguiente al -5 es el -4), no pasa lo mismo con los racionales, pues* ***entre dos números racionales existen infinitos números****.*

Una forma de encontrar otro racional entre a *y* b *, dos números racionales, es calculando la semisuma de* a *y* b *:*

$$\frac{a+b}{2}$$

Ejemplo:

Entre 7 y 8, dos números pertenecientes al conjunto de los números racionales podemos encontrar con la semisuma de estos un número racional entre ellos:

$$\frac{7+8}{2}=\frac{15}{2}$$

Encontremos un número racional entre -8 y -7:

$$\frac{-8-7}{2}=-\frac{15}{2}$$

Entre 0 y 1 obtenemos $\frac{1}{2}$ *que es un número racional entre los valores dados.*

- Los decimales son una forma de escribir números fraccionarios, sin escribir una fracción.
- La fracción 7/10 se podría escribir en forma decimal como 0,7.
- La coma decimal indica que este es un número decimal.
- El decimal 0,7 se podría decir como "siete décimos" o como "cero comas siete".

A los números decimales los podemos clasificar atendiendo a su parte decimal:

1

Números Enteros

- Carecen de parte decimal ó su parte decimal es nula.
- Ejemplo: 2; 7; -3; 5.

2

Números Decimales Exactos

- Tienen un número **finito** de cifras decimales.
- Ejemplo: 2,33 ; 5,8994 ; -6,3226

3

Números Decimales Periódicos

- Tienen **infinitas cifras decimales** que se repiten a partir de una pauta dada, a las cifras que se repiten se les llama **periodo**, como no se puede expresar las infinitas cifras se coloca un arco sobre las cifras que forma el periodo:
- Ejemplo: $2,\overset{\frown}{36} = 2,36363636\ldots$; $-3,\overset{\frown}{9} = -3,9999999\ldots$

NO SON NÚMEROS RACIONALES AQUELLOS NÚMEROS DECIMALES CON INFINITAS CIFRAS DECIMALES NO REPETITIVAS. ES DECIR, AQUELLOS NÚMEROS DECIMALES CON INFINITA PARTE DECIMAL Y DONDE NO PODEMOS ENCONTRAR UN PERIODO (CIFRAS QUE SE REPITEN).

Fracciones

Recordemos que:

- ***Si dividimos un objeto o unidad en varias partes iguales, a cada una de ellas, o a un grupo de esas partes, se las denomina fracción. Recuerde que si se puede expresar como fracción entonces es un número racional.***

Fracciones irreducibles

- ***Una fracción*** $\frac{a}{b}$ ***es irreducible cuando*** a ***y*** b ***son números primos entre sí.***

Ejemplo:

- $\frac{2}{3}$ *es una fracción irreducible, 2 y 3 son números primos.*
- $\frac{7}{5}$*, es una fracción irreducible.*
- $\frac{2}{6}$*, nos es una fracción irreducible 2 es primo, pero 6 no lo es.*

Fracciones equivalentes

- ***Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad.***
- ***Dadas las fracciones*** $\frac{a}{b}$ ***y*** $\frac{c}{d}$ ***son equivalentes, si y solo sí*** $a.d = b.d$ ***.***

Ejemplo:

- $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ *son fracciones equivalentes, porque* $1.4 = 2.2$*.*
- $\frac{5}{4}$ y $\frac{7}{2}$*, no son fracciones equivalentes dado que* $5.2 \neq 4.7$*.*
- *Para obtener fracciones equivalentes a partir de una fracción dada basta con multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número y obtenemos así una fracción equivalente a la dada.*

  Si multiplicamos a $\frac{1}{2}$ *por* $\frac{2}{2}$ *obtenemos* $\frac{2}{4}$ *entonces* $\frac{2}{4}$ *y* $\frac{1}{2}$ *son equivalentes dado que representan la misma cantidad. Observamos que la condición dada en la definición se cumple:* $2.2 = 4.1$*.*

Fracciones propias

- ***Fracciones propias son aquellas en las que el numerador es menor que el denominador. Por lo tanto, las fracciones propias son menores a la unidad.***

Ejemplo:

- $\frac{1}{3};\frac{2}{6};\frac{12}{21}$ *son fracciones propias dado que el numerador es menor que el denominador.*

Fracciones impropias

- ***Fracciones impropias son aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador. Por lo tanto, las fracciones impropias son mayores a la unidad.***

Ejemplo:

- $\frac{3}{2};\frac{7}{4};\frac{25}{12}$ *son fracciones impropias dado que el numerador es mayor que el denominador.*

Fracciones aparentes

Fracciones aparentes son aquellas en las que el numerador es igual que el denominador. Por lo tanto, son iguales a la unidad.

Ejemplo:

- $\frac{5}{5};\frac{3}{3};\frac{17}{17}$ *son fracciones aparentes dado que el numerador es igual al denominador, y al simplificarlo obtenemos la unidad.*

Comparación de Fracciones

Primer caso*: Dadas dos o más fracciones que tienen igual denominador e igual signo es mayor la que tiene mayor numerador. Ejemplo:*

Ejemplo:

- $\frac{4}{5}$ *y* $\frac{7}{5}$*. En este caso* $\frac{7}{5}$ *es mayor que* $\frac{4}{5}$*.*
- $\frac{13}{3}$ y $\frac{7}{3}$*. Aquí* $\frac{7}{3}$ *es menor que* $\frac{13}{3}$

Segundo caso*: dos o más fracciones que tienen igual numerador e igual signo es mayor la que tiene menor denominador.*

Ejemplo:

- $\frac{7}{8}$ *y* $\frac{7}{4}$*. En este caso* $\frac{7}{4}$ *es mayor que* $\frac{7}{8}$*.*
- $\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{8}$*, tienen igual numerador por lo tanto* $\frac{2}{3}$ *es la fracción menor.*

Tercer caso*: dos o más fracciones con distinto numerador y denominador e igual signo hay que llevarlas a fracciones equivalentes, es decir* *<u>reducir fracciones a un común denominador</u>* *y a partir de ahí estamos en el primer caso que ya hemos visto.*

Ejemplo:

- $\frac{3}{5}$ *y* $\frac{11}{7}$*. Primero reducimos a fracciones equivalentes a* $\frac{3}{5}$ *lo multiplicamos por* $\frac{7}{7}$ *y obtenemos* $\frac{21}{35}$ *y a* $\frac{11}{7}$ *lo multiplicamos por* $\frac{5}{5}$ *y obtenemos* $\frac{55}{35}$*. Ambas fracciones tienen igual denominador, entonces aplicamos el primer caso. Entonces* $\frac{11}{7}$ *es mayor que* $\frac{3}{5}$*.*

Expresión decimal de los números fraccionarios

- ***Para expresar a un número racional en forma decimal basta con dividir el numerador por el denominador. Todos los números racionales se pueden escribir en forma decimal.***

Ejemplo:

- $\frac{5}{7}=0,71428571$
- $\frac{9}{3}=2,0$
- $\frac{15}{2}=7,5$
- $\frac{3}{9}=0,3333...$

Clasificación de los números decimales

- ***Decimales finitos: Son los que tienen una cantidad fija de decimales después de la coma.***

Ejemplos:

- $0,28$
- $2,485$
- $35,12530$
- $0,0000321$

- ***Decimales infinitos o periódicos: Son todos aquellos que poseen infinitas cifras después de la coma que se pueden o no repetir.***

Ejemplos:

- $3,33333...$
- $15,123123123123...$
- $4,236666...$

A los decimales periódicos los podemos clasificar en:

- ***Decimales Periódicos Puros: Son aquellos cuya parte decimal se repite indefinidamente.***

Ejemplos:

- $5,2222...$
- $5,46464646....$
- $1,19191919...$

- ***Decimales Periódicos Mixtos: Son aquellos en cuya parte decimal hay una parte que no se repite periódicamente.***

Ejemplos:

- $0,56377777...$
- $26,982222...$
- $-16,256333333...$

En resumen, los decimales periódicos pueden ser:

*- Decimales **periódicos puros,** si el período comienza inmediatamente después de la coma.*

*- Decimales **periódicos mixtos**, si el período no comienza inmediatamente después de la coma.*

Pasaje de notación decimal finito a fracción

Para pasar un decimal finito a fracción debemos tomar como numerador el número a transformar sin coma y dividirlo por el número que resulta de anteponer un 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tengamos en el número de partida.

Ejemplo:

- *Transformar 3,485 en fracción. Tomamos como numerador el número a transformar sin coma, nos queda como numerador 3485. Ahora construimos el denominador anteponiendo un 1 y con tantos ceros como parte decimal trae el número a transformar. Nos queda como denominador 1000. Entonces* $3,485=\dfrac{3485}{1000}$.

Otros ejemplos:

$$56,3628=\begin{cases}\text{numerador } 563628\\ \text{denominador } 10000\end{cases}\rightarrow \frac{563628}{10000}$$

$$0,9657=\begin{cases}\text{numerador } 9657\\ \text{denominador } 10000\end{cases}\rightarrow \frac{9657}{10000}$$

Pasaje de notación decimal periódica a fraccionaria

Tenemos dos posibles casos:

- *Que el período abarque la totalidad de la parte decimal*
- *Que la parte decimal tenga una parte no periódica al comienzo, y una periódica luego*

Primer caso

Cuando toda la parte decimal de la expresión es periódica, se procede de la siguiente forma: se toma el período y se lo ubica como numerador de la fracción a obtener, se cuentan los "lugares" o cantidad de cifras que contiene el período, y se colocan como numerador de la fracción tantos números 9 como sea esa cantidad.

Por ejemplo:

Para pasar a notación fraccionaria a	$0,\overset{\frown}{5}$	*se coloca al período (5) como numerador; y como ese período está constituido por solo 1 cifra, lugar o dígito (el 5) se coloca 1 número 9 como denominador, y queda*	$\frac{5}{9}$

Otro ejemplo:

Para pasar a fracción a	$0,\overset{\frown}{317}$	*se coloca al período (317) como numerador; y como este período está constituido por 3 cifras (3, 1 y 7) se colocan 3 números 9 como denominador, y queda*	$\frac{317}{999}$

Segundo caso

Cuando no toda la parte decimal de la expresión es periódica (sino que hay decimales no periódicos al principio, y periódicos luego), se procede de la siguiente forma: se toma la parte decimal completa (cifras no periódicas y período) y se le resta la parte no periódica: al resultado se lo ubica como numerador de la fracción a obtener. Por otra parte, se cuentan los "lugares" o cantidad de cifras que contiene el período (por un lado), y los que corresponden a la parte no periódica (por otro): se colocan como numerador de la fracción tantos números 9 como la primera de dichas cantidades (cifras periódicas) seguidos por tantos números 0 como la segunda cantidad (cifras no periódicas).

Ejemplo:

Para pasar a notación fraccionaria a	$0,2\overline{7}$	*se toma la parte decimal completa (27) y se le resta la parte no periódica (2): el resultado (25) se coloca como numerador; como el período tiene una sola cifra (7) se coloca un 9 en el denominador, seguido por un 0 ya que sólo hay una cifra no periódica (el 2)*	$\frac{25}{90}$

Otro ejemplo:

Para pasar a fracción a	$0,215\overline{8}$	*se toma la parte decimal completa (2158) y se le resta la no periódica (215): el resultado (1943) será el numerador; como el período tiene una sola cifra (8) se coloca un 9 en el denominador, seguido por tres 0 ya que hay cifras no periódicas (2, 1 y 5)*	$\frac{1943}{9000}$

Operaciones con fracciones

*Recordemos que las operaciones de suma, resta, multiplicación y división se pueden efectuar en **Q** dado que al aperar siempre obtenemos como resultado un número que pertenece a **Q**.*

Suma y resta de fracciones del mismo denominador

- ***Para sumar fracciones del mismo denominador, se suman los numeradores y se deja el mismo denominador.***

Ejemplo:

- $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}+\frac{10}{9}=\frac{5+2+10}{9}=\frac{17}{9}$

- ***Para restar fracciones del mismo denominador, se restan los numeradores y se deja el mismo denominador.***

Ejemplo:

- $\frac{3}{4}-\frac{13}{4}=\frac{3-13}{4}=-\frac{10}{4}$

Reducción de fracciones a común denominador por el método de los productos cruzados

- ***Para reducir fracciones a común denominador por el método de los productos cruzados, se multiplican el numerador y el denominador de cada fracción por el producto de los denominadores de las demás.***

Ejemplo:

- *Vamos a reducir a común denominador las siguientes fracciones.*

$$\frac{2}{3} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{5}{4}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2.8.4}{3.8.4}=\frac{64}{96}; \quad \frac{6}{8}=\frac{6.3.4}{8.3.4}=\frac{72}{96}; \quad \frac{5}{4}=\frac{5.3.8}{4.3.8}=\frac{120}{96}$$

Así las fracciones buscadas son $\frac{64}{96};\frac{72}{96};\frac{120}{96}$ *, todas ellas tienen como común denominador 96 por lo tanto podemos aplicar el procedimiento para sumar o restas fracciones de igual de nominador.*

$$\frac{2}{3}+\frac{6}{8}+\frac{5}{4}=\frac{64}{96}+\frac{72}{96}+\frac{120}{96}=\frac{64+72+120}{96}=\frac{256}{96}$$

$$\frac{2}{3}-\frac{6}{8}=\frac{64}{96}-\frac{72}{96}=\frac{64-72}{96}=-\frac{8}{96}$$

Suma y resta de fracciones de distinto denominador. Reducción de fracciones a común denominador por el método del mínimo común múltiplo

El siguiente procedimiento se utiliza para sumar o restar fracciones de distintos denominadores, para ello se reducen las fracciones a un común denominador.

- ***Para reducir fracciones a común denominador por el método del mínimo común múltiplo se procede así:***
- ***Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores, y ese valor es el denominador común de todas las fracciones.***
- ***Se divide el mínimo común múltiplo por el denominador de cada fracción y el cociente obtenido se multiplica por el numerador y se aplica la operación correspondiente.***

Ejemplo:

- *Resolver la siguiente operación utilizando reducción de fracciones a común denominador por el método del mínimo común múltiplo.*

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{1}{8}$$

El m.c.m. (4,5,8) = 40

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{1}{8}=\frac{10.1+8.3+5.1}{40}=\frac{10+24+5}{40}=\frac{39}{40}$$

Otro ejemplo:

$$\frac{4}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$$

El mcm (3,8,9) = 72

$$\frac{4}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=\frac{24.4+9.1+8.1}{72}=\frac{96+9+8}{72}=\frac{113}{72}$$

Otro ejemplo:

$$\frac{6}{5}-\frac{4}{7}$$

El mcm (5,7) = 35

$$\frac{6}{5}-\frac{4}{7}=\frac{7.6-5.4}{35}=\frac{42-20}{35}=\frac{22}{35}$$

Multiplicación de fracciones

- ***El producto de dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.***

Ejemplo: $\frac{5}{6}.\frac{7}{2}.\frac{3}{4}=\frac{5.7.3}{6.2.4}=\frac{105}{48}$

División de fracciones

- ***Para dividir una fracción*** $\frac{a}{b}$ ***por otra fracción*** $\frac{c}{d}$***. Se multiplica la fracción*** $\frac{a}{b}$ ***por la fracción inversa de*** $\frac{c}{d}$

$\left(\frac{c}{d}\ \text{inversa}\ \rightarrow\frac{d}{c}\right)$***, o lo que es lo mismo, se multiplica en cruz los términos de las fracciones*** $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}$.

Ejemplos:

- $\frac{3}{5}:\frac{7}{4}=\frac{3}{5}.\frac{4}{7}=\frac{3.4}{5.7}=\frac{12}{35}$

Números Irracionales

- *Los números irracionales son aquellos que **no** se pueden expresar mediante números racionales. Es decir, un número irracional no puede expresarse de la forma* $\frac{a}{b}$*, siendo* a *y* b *números enteros y* b *distinto de 0.*
- *Los números irracionales se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales que no siguen ningún patrón repetitivo.*
- *Su nombre proviene del hecho de que no se puede expresar como razón de dos enteros.*
- *Se denotan con la letra **I**.*

Los más célebres números irracionales se identifican con símbolos.

Ejemplo:

$$\pi=3{,}14159265358979323846264338\ldots$$

$$e=\ 2{,}7182818284590452354\ldots\ \ (\text{número e base de los logaritmos neperianos})$$

$$\varphi=1{,}6180339887498948482045868343656 38\ldots\ \ (\text{número áureo "fi"})$$

Entre otros son también números irracionales:

$$\sqrt{2}=1{,}414213562\ldots$$

$$\sqrt{3}=1{,}732050808\ldots$$

$$\sqrt{5}=2{,}236067977\ldots$$

*Para identificar un número irracional debemos observar la parte decimal. Si la parte decimal es infinita y no podemos identificar dígitos que se repiten periódicamente entonces el número dado es un número que pertenece al conjunto **I**.*

Para operar con números irracionales se usa un número racional que es una aproximación del número irracional en cuestión y con esa aproximación se procede a operar, siempre y cuando no se cuente con calculadora para efectuar con precisión los cálculos. Recuerda que π *no es 3,14 es 3,141592…, por lo tanto. Cuando debemos informar resultados usaremos la tecla de la calculadora que represente este número irracional.*

Ejemplo:

$$\pi\approx3{,}14;$$

$$\mathrm{e}\approx2{,}71$$

*Podemos concluir entonces que un **número** es **irracional si posee infinitas cifras decimales no periódicas**, por tanto, **no se pueden expresar en forma de fracción**.*

Números decimales no periódicos

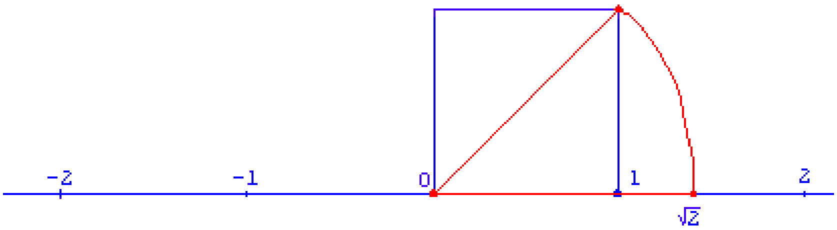
- Tienen infinitas cifras decimales que no siguen ninguna pauta. Por lo tanto no podemos identificar periodo alguno. Estos son los números irracionales.

Representación de los números irracionales

También los números irracionales se representan en la recta numérica.

Por ejemplo, para calcular el punto que representa el número $\sqrt{2}$ *realiza los siguientes pasos:*

Levanta sobre la recta un cuadrado cuyo lado sea el segmento unidad entre el 0 y el 1. Según el teorema de Pitágoras, la diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2}$.
Utiliza un compás para trasladar esa diagonal sobre la recta. El punto de corte del arco del compás sobre la recta representa el número $\sqrt{2}$.



Existen otros métodos para representar un número irracional ellos son:

- Representación en la recta real de números irracionales utilizando el teorema de la altura.
- Representación en la recta real de números irracionales utilizando el teorema del cateto.

En nuestro caso solo trabajaremos con el método de representación en la recta real de números racionales utilizando el teorema de Pitágoras. En algunos casos recurriremos al truncamiento de cifras para facilitar su representación.

Actividad de Producción

1. *Señale cuales de las siguientes afirmaciones son Verdaderas ó Falsas.*

Orden	Afirmación	Verdadera	Falsa
a.	***N*** *es finito.*		
b.	*El primer elemento en* ***N*** *es el 0.*		
c.	*Las fracciones pertenecen a* ***N***.		
d.	*Los números negativos pertenecen a* ***N***.		
e.	*El primer elemento en* ***N*** *es el 1.*		
f.	*Entre dos números naturales consecutivos no existe otro natural.*		
g.	***N*** *tiene primer y último elemento.*		
h.	*N es un conjunto infinito.*		
i.	*Los números decimales pertenecen a* ***N***.		

2. *Encontrar los diez primeros múltiplos de los siguientes números naturales.*

Orden	Número	Múltiplos
a.	2	
b.	3	

c.	4	
d.	5	
e.	6	
f.	7	
g.	8	
h.	9	
i.	10	

3. Encontrar los divisores de los siguientes números naturales.

Orden	*Número*	*Divisores*
a.	25	
b.	36	
c.	49	
d.	54	
e.	68	
f.	72	
g.	88	
h.	96	
i.	100	

4. Indicar si los siguientes números naturales son primos o compuestos.

Orden	*Número*	*Primos/Compuestos*
a.	0	
b.	1	
c.	2	
d.	3	
e.	6	
f.	7	
g.	11	
h.	17	
i.	24	
j.	112	
k.	115	
l.	117	
m.	1024	
n.	1513	
o.	5939	

5. ¿Con qué dígito completarías para que el número sea múltiplo de a?

Orden	*Número*	*Dígito*
a.	$12\square 2 \quad a=4$	
b.	$64\square 95 \quad a=3$	
c.	$5\square 25 \quad a=5$	
d.	$5\square 25 \quad a=5$	
e.	$874\square \quad a=10$	
f.	$751\square \quad a=2$	

g.	$504\square$	$a=8$
h.	$75\square 6$	$a=9$
i.	$852\square$	$a=6$

6. Determine la divisibilidad entre 8 de los números siguientes.

Orden	Número	¿Es divisible por 8?
a.	564321	
b.	52368	
c.	12474	
d.	66666	
e.	746532	
f.	1704	
g.	29584	
h.	26528	
i.	78936	

7. Determine la divisibilidad entre 9 de los siguientes números.

Orden	Número	¿Es divisible por 9?
a.	652842	
b.	963279	
c.	46953	
d.	59301	
e.	654258	
f.	3871215	
g.	322119	
h.	4441600	
i.	587952	

8. Descomponer los siguientes números en factores primos.

Orden	Número	Factores
a.	4	
b.	8	
c.	16	
d.	35	
e.	49	
f.	124	
g.	512	
h.	1024	
i.	1331	

9. Determinar el mcd y mcm de cada una de las parejas de números, y verifique el producto del mcd y el mcm sea igual al producto ab.

Orden	Número	mcd	mcm	mcd x mcm	a. b
a.	$a=8, b=28$				
b.	$a=27, b=63$				
c.	$a=14, b=35$				
d.	$a=9, b=15$				

e.	$a = 15, b = 33$
f.	$a = 42, b = 66$
g.	$a = 15, b = 35$
h.	$a = 6, b = 21$
i.	$a = 45, b = 75$

10. *Encontrar el mcm y el mcd para las siguientes ternas de números.*

Orden	***Número***	***mcd***	***mcm***
a.	*12,18,24*		
b.	*3,6,9*		
c.	*15,25,100*		
d.	*18,36,42*		
e.	*144,64,18*		
f.	*244,168,220*		
g.	*3,5,7*		
h.	*18,15,11*		
i.	*16,25,36*		

11. *Indicar cuales de las siguientes afirmaciones son Verdaderas ó Falsas.*

Orden	***Afirmación***	***Verdadera***	***Falsa***
a.	***Z** es finito.*		
b.	*El primer elemento en **Z** es el 0.*		
c.	*Las fracciones pertenecen a **Z**.*		
d.	*Los números negativos pertenecen a **Z**.*		
e.	*El primer elemento en **N** es el 1.*		
f.	*Entre dos números enteros consecutivos no existe otro entero.*		
g.	***Z** tiene primer y último elemento.*		
h.	***Z** es un conjunto infinito.*		
i.	*Los números decimales pertenecen a **Z**.*		
j.	*Todo número entero tiene antecesor y sucesor.*		
k.	*Los números naturales son enteros.*		
l.	***Q** es un conjunto infinito.*		
m.	***Q** tiene primer elemento.*		
n.	*Entre dos números racionales no existe otro número racional.*		
o.	*Todo número racional se puede expresar como fracción.*		
p.	*Los números negativos sin parte decimal no pertenecen a **Q**.*		
q.	*Los números naturales son racionales.*		
r.	*El 0 es un número racional.*		

12. *Completar la siguiente tabla.*

Orden	Fracción	Número Decimal	Parte entera	Parte decimal
a.	$\frac{7}{20}$			

b. $\frac{8}{3}$

c. $-\frac{3}{5}$

d. $\frac{23}{12}$

e. $-\frac{6}{9}$

f. $-\frac{9}{6}$

g. $\frac{3}{3}$

h. 5

13. *Encuentra la fracción o decimal según corresponda.*

Orden	*Fracción*	*Número Decimal*
a.	$\frac{7}{20}$	
b.	$\frac{8}{3}$	
c.	$-\frac{3}{5}$	
d.	$\frac{23}{12}$	
e.	$-\frac{6}{9}$	
f.	$0,35$	
g.	$12,9...$	
h.	$0,153153...$	
i.	$-1650,121212...$	

14. *Escribe la fracción correspondiente a los siguientes decimales:*

Orden	***Número Decimal***	***Fracción***
a.	$0,38$	
b.	$5,4$	
c.	$7,\overset{\frown}{4}$	
d.	$7,\overset{\frown}{4}$	
e.	$0,1\overset{\frown}{5}$	
f.	$55,350$	
g.	$-1,898989...$	
h.	$-30,21$	
i.	$-87,12345$	

15. *Dados los siguientes números racionales escribe su expresión decimal y clasifícalos.*

Orden	*Fracción*	*Decimal*	*Clasificación*

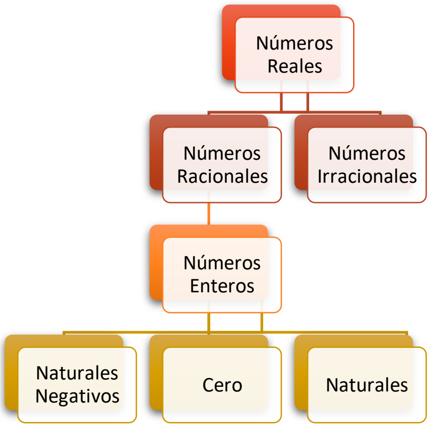
a.	$\frac{1}{4}$		
b.	$-\frac{4}{8}$		
c.	$\frac{15}{9}$		
d.	$\frac{12}{3999}$		
e.	$\frac{97}{333}$		
f.	$\frac{1000}{9}$		
g.	$\frac{512}{512}$		
h.	$-\frac{321}{15990}$		
i.	$\frac{7}{5}$		

16. Con los siguientes pares de números inserte el signo de desigualdad (<, >) correcto

Orden	***Número***	***Signo***	***Número***
a.	$\frac{3}{4}$		$\frac{8}{7}$
b.	$-\frac{5}{4}$		$\frac{6}{4}$
c.	$-\frac{6}{7}$		$-\frac{5}{7}$
d.	$-\frac{8}{9}$		$-\frac{9}{9}$
e.	$\frac{17}{4}$		$\frac{17}{3}$
f.	$\frac{26}{6}$		$-\frac{20}{3}$
g.	$\frac{18}{7}$		$\frac{27}{2}$
h.	$-\frac{16}{5}$		$-\frac{32}{3}$
i.	$-0,26$		$-\frac{26}{99}$

Números Reales

La unión de los racionales y los irracionales forma el conjunto de los números reales.



Características:

- Se denotan con la letra **R**.
- Es un conjunto **totalmente ordenado**, es decir si tomamos dos elementos cualesquiera del conjunto podemos establecer quién es menor y quién es mayor entre ellos.
- Se **representan** gráficamente en la **recta real**: a cada punto de la recta real le corresponde un número real y viceversa.
- **R es** un conjunto **denso**, dado que si tomamos dos números que pertenecen al conjunto existen infinitos números reales entre estos.
- **R no** es conjunto numerable (es numerable o contable cuando sus elementos pueden ponerse en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales).

Resumen de las propiedades características de los distintos conjuntos numéricos:

Conjunto	*Ordenado*	*Denso*	*Numerable*
N	•		•
Z	•		•
Q	•	•	•
I	•	•	
R	•	•	

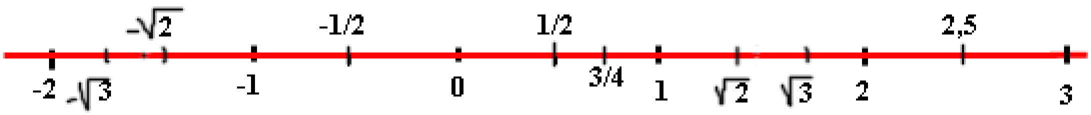
Representación de los números reales

*Los números reales se representan en una recta que denominaremos **recta real**.*

Es posible establecer una correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta (recta numérica) de la siguiente manera.

Dada una recta, se selecciona un punto arbitrario de ésta para representar el cero (0) y otro punto a la derecha del cero para representar el uno (1). Luego dividimos toda la recta en segmentos que tengan la misma longitud que el segmento de cero a uno, para así representar los números enteros, los números 1, 2, 3, 4, (en este orden) a la derecha del cero y los números -1, -2, -3, ... (en este orden) a la izquierda del cero.

Los restantes números reales se representan en esta recta, intentando aproximar o truncar con el objeto de obtener una mejor visualización de su ubicación en la recta real, tal como se muestra en el ejemplo que sigue.



Como podemos observar a cada número real le corresponde uno y solo un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde uno y solo un número real.

Ley de Tricotomía

- ***Dado dos números reales, a y b, se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:***

$$a > b$$
$$a < b$$
$$a = b$$

Ejemplo:

La relación existente entre dos números reales $\frac{3}{4}$ *y -3 es:* $\frac{3}{4} > -3$

Dados -8 y -7 la relación existente es: -8 < -7

Entre los números $\frac{\sqrt{16}}{4}$ *y 1 la relación existente es* $\frac{\sqrt{16}}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Para identificar la relación existente entre dos números fraccionarios multiplicamos en cruz, es decir, multiplicamos el numerador del 1° por el denominador del 2° y comparamos con el denominador del 1° por el numerador del 2°. (Ver también casos desarrollados en el apartado Fracciones).

$\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{4}$ comparo 3.4 con 2.5, *en este caso* $\frac{5}{4} > \frac{3}{2}$. *Si al comparar dos fracciones, de su multiplicación cruzada obtenemos valores iguales, estamos frente a fracciones equivalentes. Ejemplo:* $\frac{3}{2}$ y $\frac{9}{6}$ comparo 6.3 con 9.2, *en este caso 18 = 18, por lo tanto, las fracciones comparadas son* ***fracciones equivalentes****.*

Valor Absoluto

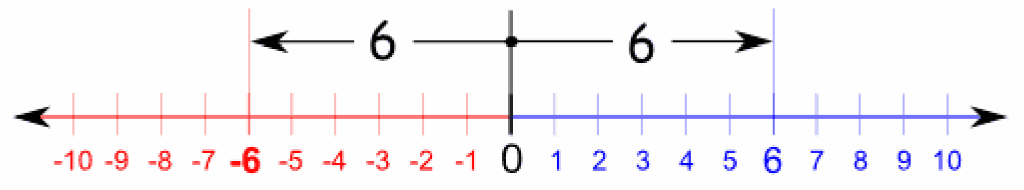
- ***El valor absoluto de un número real es la distancia que lo separa del cero en la recta numérica.***

Se escribe entre barras |x|

Si el valor de x es cero o un número positivo entonces el valor absoluto es el mismo número x, si el valor de x es menor que cero entonces el valor absoluto es su opuesto –x.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Geométricamente el valor absoluto representa la distancia, en la recta real, del número dado al origen.



Esta imagen represente el valor absoluto de 6 el que denotamos $|6|$ *y el valor absoluto de -6,* $|-6|$ *como podemos observar ambos casos representa una distancia de 6 unidades al origen de coordenadas.*

Ejemplos:

el valor absoluto de -4 es 4 y se escribe así: |-4|= 4
el valor absoluto de 4 es 4 y se escribe así: |4|= 4

el valor absoluto de $-\frac{1}{4}$ *es* $\frac{1}{4}$ *y se escribe así:* $\left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$

el valor absoluto de $-\sqrt{2}$ *es* $\sqrt{2}$ *y se escribe así:* $\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$

- **De la definición se desprende que dos números opuestos tienen igual valor absoluto.**

El valor absoluto de cualquier número real es positivo ó cero.

Operaciones Básicas en R

Analizaremos las cuatro operaciones básicas en ***R****: adición, sustracción, multiplicación y división.*

- ***Adición**: La adición de dos números reales,* a *y* b ***los que se llama sumandos, da por resultado otro número real, al que se denomina suma de los números dados.***

$$\begin{array}{l} a+b \to suma \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{sumandos} \end{array}$$

Nota: observe que la operación se denomina adición y su resultado suma.

Reglas para la adición:

- ***Para adicionar dos números reales del mismo signo se suman los valores absolutos de cada uno de ellos y se le asigna el mismo signo.***
- ***Para adicionar dos números reales de distintos signos se resta el valor absoluto del mayor con el valor absoluto del menor y se le asigna el signo correspondiente al de mayor valor absoluto.***

Ejemplos:

$$5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$$

$$\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}$$

$$\pi-3=0{,}14159265...$$

- ***Sustracción**: La sustracción de dos números reales, a los que se llama minuendo y sustraendo, da por resultado otro número real al que denominamos diferencia o resta de los números dados.***

$$\begin{array}{l} a-b \to \text{ resta o diferencia} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{minuendo} \quad \text{sustraendo} \end{array}$$

Nota: observe que la operación se denomina sustracción y su resultado resta.

- ***Regla para restar un número real de otro:***
- ***Cambie el signo del sustraendo y luego sume de acuerdo con las reglas especificadas para la suma.***

Ejemplo:

$$-16-(-17)=-16+17=1$$

$$\sqrt{2}-(3)=\sqrt{2}-3=-1{,}585786...$$

$$-\frac{3}{5}-\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{5}-\sqrt{3}=2{,}332050808...$$

- ***Multiplicación**: La multiplicación de dos números reales, denominados factores, da por resultado otro número real llamado producto de los números dados.***

$$\begin{array}{l} a \;\; . \;\; b \to producto \\ \downarrow \quad \downarrow \\ factores \end{array}$$

Regla de la multiplicación:

- ***Para multiplicar dos números reales se multiplican sus valores absolutos; y el signo es positivo si los factores son de igual signo en caso contrario el signo del producto es negativo.***

Ejemplo:

$$(-8).(-9)=|-8|.|-9|=8.9=72$$

$$\frac{1}{4}.\frac{5}{3}=\left|\frac{1}{4}\right|.\left|\frac{5}{3}\right|=\frac{5}{12}$$

$$3.\left(-\frac{2}{5}\right)=|3|.\left|-\frac{2}{5}\right|=\frac{6}{5}$$

- ***<u>División</u>*: La división de dos números reales a los que se denomina dividendo y divisor, da por resultado otro número real llamado cociente o razón entre los números dados.**

$$\begin{array}{ccl} a & \div\ b \rightarrow & \text{cociente o razón} \\ \downarrow & \downarrow & \\ \text{dividendo} & \text{divisor} & \end{array}$$

Regla:

- ***La división de dos números reales con el mismo signo es el cociente de sus valores absolutos y el signo es positivo.***
- ***La división de dos números reales con distinto signo es el cociente de sus valores absolutos y el signo es negativo.***

Ejemplo:

$$(-27)\div(-3)=|-27|\div|-3|=9$$

$$(-81)\div 3=$$

$$=|-81|\div|3|=81\div 3=27$$

El inverso aditivo de 27 es -27, por tanto, $(-81)\div 3=-27$

Propiedades fundamentales de las operaciones en R

Antes de comenzar a dar tratamiento de las propiedades de las operaciones básicas en ***R*** *vamos a definir la Ley de Cierre o Clausura para las operaciones básicas.*

- ***<u>Ley de Cierre o Clausura</u>: La operación de adición, es cerrada en todos los conjuntos numéricos: N, Z, Q, I, R. Es decir, la adición de dos números de un conjunto da por resultado otro número del mismo conjunto numérico.***
- ***<u>La operación sustracción es cerrada en los conjuntos numéricos</u>: Z, Q, I, R. No se verifica la ley de cierre para el conjunto N, pues la sustracción de dos números naturales puede dar como resultado un número negativo.***
- ***La multiplicación es cerrada para todos los conjuntos numéricos. Es decir, la multiplicación de dos números pertenecientes a un conjunto da por resultado otro número del mismo conjunto.***
- ***La división es cerrada para los conjuntos Q, I, R, exceptuando la división por 0 que no está definida para ningún conjunto numérico.***

Sean a, b y c *números reales:*

La ***adición*** *cumple las siguientes propiedades:*

a) *Asociativa:* $a+(b+c)=(a+b)+c$ *;*

b) *Conmutativa:* $a+b=b+a$

c) 0 *es el neutro aditivo:* $a+0=0+a=a$ *;*

d) Inverso Aditivo: *Dado* $a \in$ ***R****, existe un único número real, que denotaremos como* $-a$*, tal que* $a+(-a)=0$

Observemos: *La sustracción se puede escribir como adición:*

$$a-b=a+(-b)$$

No se verifica *la <u>propiedad conmutativa ni asociativa para la sustracción</u>.*

El ***producto*** *cumple las siguientes propiedades:*

a) *Asociativa:* $a.(b.c)=(a.b).c$ *;*

b) *Conmutativa:* $a.b=b.a$ *;*

c) 1 *es el elemento neutro de la multiplicación:* $a.1=1.a=a$ *;*

d) *Todo número real distinto de* ***0*** *tiene inverso multiplicativo: dado* $a\in$ ***R****,* $a\neq 0$*, existe un único número real, que denotaremos* $\frac{1}{a}$*, tal que,* $a.\frac{1}{a}=1$ *;*

e) *Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:* $a.(b+c)=a.b+a.c$

Observemos: *La división se puede escribir como multiplicación:*

$$a\div b=a.\frac{1}{b}$$

No se verifican *las <u>propiedades conmutativa y asociativa para la división</u>.*

A continuación, le dejamos como resumen el siguiente cuadro que le será de utilidad para recordar las propiedades de los números reales:

Propiedad	Ejemplo	Nombre y Descripción
$a+b=b+a$	5 + 4 = 4 + 5	***<u>Propiedad conmutativa de la suma</u>: Cuando sumamos dos números, el orden no tiene importancia.***
$ab=ba$	3.5 = 5.3	***<u>Propiedad conmutativa de la multiplicación</u>: Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.***
$(a+b)+c=a+(b+c)$	(2 + 5) + 3 = 2 + (5 + 3)	***<u>Propiedad asociativa de la suma</u>: Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos sumamos primero.***
$(ab)c=a(bc)$	(3.7).2 = 3.(7.2)	***<u>Propiedad asociativa de la multiplicación</u>: Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos multiplicamos primero.***
$a(b+c)=ab+ac$ $(b+c)a=ab+ac$	2.(3 + 5) = 2.3 + 2.5 (3 + 5).2 = 2.3 + 2.5	***<u>Propiedad distributiva</u>: Cuando multiplicamos un número por la suma de otros dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y a continuación sumamos los resultados.***
$a+0=0+a$	5 + 0 = 0 + 5 = 5	***<u>Existencia de elemento neutro para la suma</u>: El 0 es el elemento neutro de la suma, dado que al sumarlo a cualquier número real nos da el mismo número.***
$a.1=1.a=a$	6.1 = 1.6 = 6	***<u>Existencia de elemento neutro para la multiplicación:</u> El 1 es el elemento neutro de la multiplicación, dado que al multiplicarlo con cualquier número real nos da como resultado el mismo número.***
$a+(-a)=(-a)+a=0$	5 + (-5) = (-5) + 5 = 0	***<u>Existencia del inverso aditivo</u>: Para todo número en R existe su opuesto ó inverso aditivo, que al sumarlos obtenemos el neutro para la suma.***
$a.\frac{1}{a}=1$	2. ½ = 1	***<u>Existencia del inverso multiplicativo</u>: Para todo número en R existe su inverso, que al***

multiplicarlos obtenemos el neutro para la multiplicación.

Introducción a las operaciones combinadas

Las operaciones combinadas son aquellas en las que aparecen varias operaciones a resolver.

Introduciremos ahora tres conceptos que nos serán de utilidad para resolver operaciones combinadas:

Signos de agrupación.
Separación de términos.
Jerarquía de los operadores.

Signos de agrupación

Para ello introduciremos el concepto de signos de agrupación.

Los signos de agrupación son el paréntesis, (); el corchete, []; y las llaves { }."Indican que la operación contenida entre estos debe efectuarse primero".

Cuando en una misma operación algebraica se encuentran presente más de un signo de agrupación los debemos resolver en el siguiente orden:

- 1º se resuelven las operaciones encerradas entre paréntesis.
- 2º se resuelven las operaciones encerradas entre corchetes.
- 3º se resuelven las operaciones encerradas entre llaves.

Ejemplo:

En la siguiente operación combinada se encuentran presente los 3 signos de agrupación:

$$5+\{18-(5.2+2.8)+3[2+8]-2\}$$

Deberíamos resolver primero la operación entre paréntesis, luego la operación encerrada en corchetes y por último la operación encerrada entre llaves.

Eliminación de los signos de agrupación.

Una vez realizada las operaciones indicadas dentro del signo de agrupación debemos eliminar el signo a efectos de poder continuar en la resolución de la operación combinada.

Para ello debemos tener en cuenta que:

Signo de agrupación precedido por signo más, NO ALTERA EL RESULTADO contenido en el signo de agrupación.

Signo de agrupación precedido por signo menos, CAMBIA el signo del valor contenido dentro del signo de agrupación.

Signo de agrupación precedido por factor positivo o negativo, MULTIPLICA al valor contenido por el signo de agrupación, aplicándose regla de los signos.

Ejemplos:

- *(5) el signo de agrupación en este caso son paréntesis y esta precedido por signo más por lo tanto nos queda 5.*
- *- [-25], el signo de agrupación son corchetes precedidos por signo menos, entonces queda 25.*
- *2 {-36}, el signo de agrupación son llaves precedidas por un factor positivo en este caso 2, por lo tanto, tenemos -72.*
- *- 3(-5), el signo de agrupación son paréntesis precedidos por un factor negativo por lo tanto obtenemos 15.*

Separar en términos

Introducimos ahora el concepto de términos dentro de una operación combinada.

Separar en términos operaciones combinadas consiste en identificar los signos más "+" y menos "-" dentro de cada signo de agrupación que nos indicarán como debemos agrupar las operaciones contenidas.

Ejemplo:

Si continuamos con el ejemplo anterior debemos analizar la operación contenida entre los paréntesis y separarla en términos, nos queda:

$$5+\{18-\underbrace{(\overset{1^{o}}{5.2}+\overset{2^{o}}{2.8})}_{\text{términos}}+3[2+8]-2\}$$

Jerarquía de los operadores

Nuestro tercer concepto se refiere al orden en que deben resolverse las operaciones.

El orden en que deben resolverse las operaciones está dado por la jerarquía de los operadores que la relacionan, debemos entonces resolver en el siguiente orden:

1º Potencias y raíces
2º Multiplicaciones y divisiones
3º Sumas y restas.

Antes de dar el ejemplo correspondiente a jerarquía de los operadores debemos tener en cuenta que: Siempre ***analizamos la operación combinada de izquierda a derecha.***

Ejemplo:

Ahora con los 3 conceptos resolvamos la operación combinada

$$5+\{18-(5.2+2.8)+3[2+8]-2\}$$

Tenemos que resolver la operación encerrada entre paréntesis.

Para ello dividiremos en términos y luego resolvemos.

$$5+\{18-\underbrace{(\overset{10}{5.2}+\overset{16}{2.8})}_{10+16}+3[2+8]-2\}$$

$$5+\{18-(26)+3[2+8]-2\}$$

Estamos en condiciones de eliminar el paréntesis, nos queda:

$$5+\{18-26+3[2+8]-2\}$$

Ahora vamos a eliminar los corchetes, resolvemos primero la operación entre estos,

$$5+\{18-26+3[10]-2\}$$

Podemos cancelar el signo y al estar precedido por el factor 3 multiplicamos y obtenemos:

$$5+\{18-26+30-2\}$$

Por último, eliminamos las llaves;

$$5+18-26+30-2$$

Como la jerarquía de las operaciones está en el mismo nivel procedemos a calcular de izquierda a derecha

$$5+18-26+30-2=25$$

Establecemos una pausa.

Antes le dejamos otro cuadro que resume algunas operaciones con racionales que han sido analizadas por Ud. en el nivel medio:

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$	Para multiplicar fracciones, multiplique los numeradores y denominadores.
2. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$	$\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$	Para dividir fracciones, invierta el divisor y multiplique
3. $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{5}+\frac{7}{5}=\frac{2+7}{5}=\frac{9}{5}$	Para sumar fracciones con un mismo denominador, sume los numeradores
4. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 7+3\cdot 5}{35}=\frac{29}{35}$	Para sumar fracciones con diferentes denominadores, obtenga un denominador común. Después sume los numeradores
5. $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$	$\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{2}{3}$	Cancele los números que son factores comunes tanto en el numerador como en el denominador
6. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $ad=bc$.	$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$, así $2\cdot 9=3\cdot 6$	Multiplique en forma cruzada

Potenciación

La potenciación es el producto de varios factores iguales.

Para abreviar la escritura, se escribe el factor que se repite y en la parte superior derecha del mismo se coloca el número de veces que se multiplica.

$$a^n=\underbrace{a.a.a.....a}_{n\ \text{veces}}$$

a *se denomina base*

n *se denomina exponente.*

Propiedades de la potenciación

Potencia de exponente 0*: Todo número* ***real distinto de cero*** *elevado al exponente 0 es igual a 1.*

Ejemplo: $5^0=1$

Recuerde: 0^0 *es una indeterminación.*

Potencia de exponente 1*: Todo número real elevado al exponente 1 es igual a la base.*

Ejemplo: $5^1=5$

Producto de potencias de igual base: *El producto de dos o más potencias de igual base* a *es igual a la potencia de base* a *y exponente igual a la suma de los correspondientes exponentes. (Se coloca la misma base y se suman los exponentes)*

Ejemplo: $5^3.5^6=5^{3+6}=5^9$

División de potencias de igual base: *La división de dos potencias de igual base* a *es igual a la potencia de base* a *y exponente igual a la resta de los exponentes respectivos. (Se coloca la misma base y se restan los exponentes)*

Ejemplo:

$$\frac{5^9}{5^4}=5^{9-4}=5^5$$

Potencia de un producto: *La potencia de un producto de base* $(a.b)$ *y de exponente* n *es igual a la potencia de* a^n *por* b^n*. (Cada base se multiplica por el exponente)*

Ejemplo:

$$(3.5)^4=3^4.5^4$$

Potencia de una división: *En la potencia de una división de base* $\frac{a}{b}$ *y de exponente* n *es igual a la potencia de* a^n *dividido por la potencia de* b^n*. Es decir, se eleva cada uno de los componentes de la base a la* n*.*

Ejemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3}$$

Potencia de una potencia: *La potencia de una potencia de base* a *es igual a la potencia de base* a *elevada a la multiplicación de ambos exponentes. Se coloca la misma base y se multiplican los exponentes.*

Ejemplo:

$(3^3)^5 = 3^{3x5} = 3^{15}$

Propiedad distributiva: *La potencia es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división.*

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

$$(3.6)^2 = 3^2.6^2$$

$$\left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{3^4}{6^4}$$

No es distributiva con respecto a la adición y sustracción:

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$

$$(a-b)^n \neq a^n - b^n$$

Ejemplos:

$$(3+4)^3 \neq 3^3 + 4^3$$

$$(3-5)^3 \neq 3^3 - 5^3$$

- La propiedad conmutativa y la propiedad asociativa no se cumple para la potenciación.

Potencia de exponente fraccionario*: Es una potencia que tiene su exponente en forma de fracción, y en la que se cumple que* $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Ejemplo:

$$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}.$$

Potencia de exponente negativo*: Es una potencia que tiene su exponente negativo. Se cumple que* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ *cuando* $a \neq 0$.

Ejemplo:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}.$$

En el siguiente cuadro le resumimos las propiedades a efectos de que analice mejor las mismas:

Ley	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada factor a la potencia.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve tanto el numerador como el denominador a la potencia.
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	Para mover del numerador al denominador o del denominador al numerador un número elevado a una potencia, cambie el signo del exponente.

Radicación

La radicación es la operación inversa de la potenciación.

- $\sqrt[n]{a}$ ***, se lee raíz n- ésima de un número real*** a ***.***

$\sqrt[n]{a}$ *: el número que está dentro de la raíz* a *se llama* radicando*, el grado de la raíz* n *se llama* índice del radical*, el resultado se llama* raíz*. Podemos considerar la radicación como un caso particular de la potenciación. En efecto, la raíz cuadrada de un número (por ejemplo* a *) es igual que* $a^{\frac{1}{2}}$*, del mismo modo la raíz cúbica de* a *es* $a^{\frac{1}{3}}$ *y en general, la raíz n-ésima de un número* a *es* $a^{\frac{1}{n}}$.

La mejor forma de resolver los ejercicios de operaciones con raíces es convertir las raíces a potencias y operar teniendo en cuenta las propiedades dadas para la operación de potenciación.

Los números negativos no tienen raíz cuadrada (en el conjunto de los números reales), ya que el cuadrado de cualquier número real es ***no negativo****. Por ejemplo,* $\sqrt{-9}$ *no es un número real pues no existe un número real cuyo cuadrado sea –9.*

La raíz n-ésima, $n>1$*, de 0 es 0, ya que* $0^n = 0$*. Es decir,* $\sqrt[n]{0} = 0$ *.Propiedades de una potencia de exponente racional*

Propiedad Raíz de un producto

La raíz enésima de un producto $a.b$ *es igual al producto de la raíz n-ésima de* a *por la raíz enésima de* b.

Ejemplo:

- $$\sqrt[2]{9.16} = \sqrt[2]{9}\sqrt[2]{16} = 3.4 = 12$$

Pero si multiplicamos $a.b$ *dentro del radical, el resultado será el mismo:*

$$\sqrt[2]{9.16} = \sqrt[2]{144} = 12$$

Conclusión: La radicación es distributiva respecto al producto.

Propiedad Raíz de un cociente

La raíz de un cociente de una fracción $\frac{a}{b}$ *es igual al cociente de la raíz n-ésima de* a *entre la raíz n-ésima de* b.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{9^{1/2}}{4^{1/2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

Cuando esta propiedad se realiza con números no hace falta pasar la raíz a potencia de exponente racional, aunque sí cuando se hace con variables. $\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^9}} = \frac{x^{3/3}}{y^{9/3}} = \frac{x}{y^3}$

Conclusión: La radicación es distributiva respecto a la división.

LA RADICACIÓN NO ES DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA ADICIÓN NI A LA SUSTRACCIÓN.

Propiedad Potencia de una raíz

Para elevar una raíz a una potencia, se conserva el índice y se eleva sólo la cantidad subradical.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{1/n}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo:

$$\left(\sqrt[4]{a^2}\right)^8 = \left(a^{2/4}\right)^8 = \sqrt[4]{a^{16}}$$

Propiedad Raíz de una raíz

Para calcular la raíz de una raíz se multiplican los índices de las raíces y se conserva la cantidad subradical.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[21]{5}$$

El siguiente cuadre resume las propiedades para su mejor interpretación:

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8\cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\ \sqrt[3]{27} = (-2)(3) = 6$
2. $\sqrt[2]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5,\ \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

Notación Científica

*La **notación científica** (notación índice estándar) es un modo conciso de anotar números enteros mediante potencias de diez, esta notación es utilizada en números demasiado grandes o demasiado pequeños.*

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1000$

$10^4 = 10000$

$10^5 = 100000$

$10^6 = 1000000$

$10^{10} = 10000000000$

Adicionalmente, 10 elevado a una potencia entera negativa $-n$ *es igual a* $\frac{1}{10^n}$*:*

$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0,1$

$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$

$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0,0001$

$10^{-10} = \frac{1}{10^{10}} = 0,0000000001$

El número 342.261.000.000.000.000.000.000.000, puede ser escrito como 3,42261 × 10^{26}*, y un número pequeño como 0,0000000000952 puede ser escrito como 9.52 ×* 10^{-11}

Ejemplos:

34.456.087 = 3.4456087 × 10^7

0,0004 508 421 = 4,508 421 × 10^{-4}

La parte potencia de 10 *se llama a menudo orden de magnitud del número, y las cifras son los dígitos significativos del mismo.*

Es muy fácil pasar de la notación decimal usual a la científica, y recíprocamente, porque las potencias de diez tienen las formas siguientes:

Si el exponente n *es positivo, entonces* 10^n *es un uno seguido de* n *ceros:*

Por ejemplo 93.000.000 = 9,3 x 10^7 *(observe que el exponente positivo es 7, esto indica que a 9,3 debo mover la coma 7 lugares hacia la derecha)*

Si el exponente es negativo, de la forma $-n$*, entonces:*

$$10^{-n} = \underbrace{0,000...000}_{n \text{ ceros}}1$$

0,000 000 000 000 000 000 000 053g = 5,3 x 10^{-23} *(El exponente es negativo -23 idica que al mover la coma de 5,3 tantos lugares como me indica el exponente hacia la izquierda.*

Por convención adoptaremos el criterio de convertir los números tomando la primera cifra significativa de izquierda a derecha, es decir:

- *Para 237500000 tomamos 2,375 x 10^{8}*
- *Para 0,000000349 tomamos 3,49 x 10^{-7}*

salvo se indique lo contrario.

Para operar convertiremos todos los números dados en notación científica y operaremos la parte entera ó decimal entre sí y en las potencias de 10 aplicaremos propiedades de potenciación de igual base.

Ejemplo:

- $(4\times10^{12})\times(2\times10^{5}) = 4.2\times10^{12+5} = 8\times10^{17}$
- $(4\times10^{12})/(2\times10^{5}) = 4/2\times10^{12-5} = 2\times10^{7}$
- $(4\times10^{12})/(2\times10^{-7}) = 4/2\times10^{12-(-7)} = 2\text{x}10^{19}$

Logaritmos

Sea a *un número positivo con* $a \neq 0$*. El logaritmo en base* a *se denota* $\log_a$*, define como*

- $\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$

Es decir que $\log_a$ *es el exponente al cual debe elevarse la base* a *para obtener* x*.*

Cuando usamos la definición de logaritmos utilizamos dos formas de notación, una la forma logarítmica $\log_a x = y$ *y la forma exponencial* $a^y = x$*.*

Ejemplos:

El siguiente cuadro ilustra ejemplos utilizando definición de logaritmos en forma exponencial y logarítmica.

Forma Logaritmo	*Forma exponencial*
$\log_{10} 100000 = 5$	$10^5 = 100000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2 \frac{1}{2} = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

Debemos tener en cuenta que cuando expresamos por ejemplo $\log 7$ *nos estamos refiriendo a* $\log_{10} 7$*. Si utilizamos calculadora solo podemos calcular los logaritmos en base 10. Más adelante veremos que procedimiento aplicamos para calcular los logaritmos de cualquier base.*

Propiedades de los logaritmos

1) Si x *e* y *son números reales positivos,* $b>0$ *y* $b \neq 1$*, entonces* $\log_b x.y = \log_b x + \log_b y$

2) Si x *e* y *son números reales positivos,* $b>0$ *y* $b \neq 1$*, entonces* $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

3) Si x *e* y *son números reales positivos,* $b>0$ *y* $b \neq 1$*, entonces* $\log_b x^n = n.\log_b x$

4) Si x *e* y *son números reales positivos,* $b>0$ *y* $b \neq 1$*, entonces*

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b b^n = n$$

Ejemplo:

- *El* $\log_4 35 = \log_4 (7.5) = \log_4 7 + \log_4 5$.
- *El* $\log \dfrac{3}{5} = \log_{10} 3 - \log_{10} 5$.
- *El* $\log_6 5^8 = 8\log_6 5$.

Cambio de base

Ahora introduciremos la fórmula de cambio de base que nos permitirá calcular cualquier logaritmo independientemente de su base.

- ***Fórmula de cambio de base:*** $\log_b x = \dfrac{\log_{10} x}{\log_{10} b}$.

Ejemplo:

- *Calcular el* $\log_8 7 = \dfrac{\log 7}{\log 8} = 0{,}9357$.
- *Calcular el* $\log_5 32 = \dfrac{\log 32}{\log 5}$.
- *El* $\log_{12} \dfrac{3}{5} = \dfrac{\log 3/5}{\log 12} = -0{,}2055$.

Actividad de Producción

17. Indicar cuales de las siguientes afirmaciones son Verdaderas ó Falsas.

Orden	Afirmación	V	F
a.	***I*** *es finito.*		
b.	***Q*** *no tiene ni primer ni último elemento.*		
c.	*Las fracciones pertenecen a* ***I****.*		
d.	*Los números decimales pertenecen a* ***R****.*		
e.	***N*** *y* ***Z*** *pertenecen a* ***Q****.*		
f.	*Si se puede representar como fracción, es un número real.*		
g.	***Q*** *e* ***I*** *conforman el conjunto de los números reales.*		
h.	*Todos los conjuntos numéricos son infinitos.*		
i.	*Los números decimales pertenecen a* ***I****.*		
j.	*Todo número racional tiene antecesor y sucesor.*		
k.	*Los números naturales son racionales.*		
l.	***I*** *es un conjunto finito.*		
m.	***R*** *tiene primer elemento.*		
n.	*Entre dos números irracionales existe otro número irracional.*		
o.	*Todo número irracional se puede expresar como fracción.*		
p.	*Los números negativos con infinita parte decimal pertenecen a* ***I****.*		
q.	*Un número con parte decimal infinita y no repetitiva pertenece a* ***Q****.*		
r.	*El 0 es un número irracional.*		

18. Identificar a que conjunto numérico pertenece cada uno de los siguientes números.

Orden	Números	Naturales	Enteros	Racionales	Irracionales	Reales
a)	$-24;\frac{15}{7};\sqrt{2};\frac{-5}{7};0,63$					
b)	$\frac{2}{30};\frac{-3}{9};2;0;\sqrt{\frac{16}{4}};2,\widehat{6}$					
c)	$\sqrt{16};\sqrt[3]{2};\frac{12}{1};-186$					
d)	$1256;\sqrt{5};\pi;3,99$					

19. Represente en la recta real los siguientes números.

Orden	Números	Representación
a)	$-4;\frac{15}{7};\sqrt{2};\frac{-5}{7}$	
b)	$\frac{2}{30};\frac{-3}{9};2;0;\sqrt{\frac{16}{4}}$	
c)	$\sqrt{16};\sqrt[3]{2};\frac{4}{1};\lvert -6\rvert$	
d)	$-1;2;-\sqrt{5};\pi;-3,\lvert 9\rvert$	

20. Ordene de mayor a menor los números representados en el punto anterior.

Orden	Números	Ordenación
a)	$-2;\frac{15}{7};-\frac{5}{7};\sqrt{2};-\frac{25}{35}$	
b)	$\frac{2}{30};\frac{-3}{9};2;0;\sqrt{\frac{16}{4}}$	
c)	$\sqrt{16};\sqrt[3]{2};\frac{12}{1};\left\|-16\right\|$	
d)	$-1;2;-\sqrt{5};\pi;-3,\left\|9\right\|$	

21. Encontrar el valor para cada una de las expresiones dadas, siendo $a=-3, b=5$.

Orden	Operaciones	Resultados
a)	$\left\|a-b\right\|$	
b)	$\left\|-a-b\right\|$	
c)	$\left\|3a+2b\right\|$	
d)	$\left\|5a:b\right\|$	
e)	$\left\|a.b\right\|$	
f)	$\left\|2b-7a\right\|$	
g)	$\left\|a.b-b.a\right\|$	
h)	$\left\|3a+2b-3b\right\|$	
i)	$\left\|2a-2a+3b-1000\right\|$	

22. En los siguientes ejercicios indique cuales de las propiedades de números reales se está empleando.

Orden	Operación	Propiedad
a.	$4+3=3+4$	
b.	$8\left(\frac{5}{4}.6\right)=\left(8.\frac{5}{4}\right).6$	
c.	$6\pi=\pi 6$	
d.	4(3+5) = 4.3 + 4.5	
e.	$-\frac{9}{5}+\frac{9}{5}=0$	
f.	$\frac{6}{5}.\frac{5}{6}=1$	
g.	0 + 13 = 13 + 0	
h.	$e.1=1.e=e$	

i.	$\frac{3}{7}+0=0+\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$	

23. *Resolver aplicando propiedad distributiva.*

Orden	***Operación***	***Propiedad distributiva***
a.	$4\left(\frac{5}{8}.4\right)$	
b.	$6\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)$	
c.	$\pi(5+2)$	
d.	$\frac{1}{3}\left(2+\frac{4}{3}\right)$	
e.	$\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{2}{3}$	
f.	$e\frac{5}{3}-\frac{2}{5}e$	

24. *Efectuar las siguientes operaciones con fracciones.*

Orden	***Operación***	***Resultado***
a.	$\frac{7}{5}+\frac{2}{10}-\frac{6}{15}=$	
b.	$\frac{3}{6}+\frac{5}{6}-\frac{4}{6}-\frac{7}{6}=$	
c.	$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{9}{6}-\frac{7}{4}+\frac{5}{2}=$	
d.	$\frac{3}{5}-\frac{11}{5}+\frac{5}{5}-\frac{7}{5}=$	
e.	$\frac{1}{7}.\frac{3}{7}=$	
f.	$\frac{4}{5}:-\frac{6}{4}=$	
g.	$-\frac{7}{3}.\frac{2}{4}=$	
h.	$\left(-\frac{3}{7}\right):\frac{6}{5}=$	
i.	$\frac{2}{9}:\left(-\frac{3}{2}\right)$	

25. *Efectuar los siguientes cálculos utilizando calculadora indicar el resultado obtenido a que conjunto numérico pertenece.*

Orden	Operación	Resultado	¿A qué conjunto pertenece el resultado?
a.	12,99 + 1236 =		
b.	$\frac{3}{2}$ (36 – 15) =		
c.	2(16 - $\frac{4}{3}$)		
d.	0,25(100 + 200)		
e.	21(2,65 – 3,2)		
f.	256.12 + 256.13 + π		
g.	18.4 - 18.9		
h.	716 + 218 – 964 -321		
i.	15:e		

26. *Calcular e indicar que propiedad se aplica para resolver las siguientes operaciones:*

Orden	Operaciones	Resultados	Propiedad
a)	$3+(-5+2)=(3-5)+2$		
b)	$8(3.(-5))=(8.3).(-5)$		
c)	$16(-2)=(-2)16$		
d)	$12.1=1.12$		
e)	$(-5)+0=0+(-5)$		
f)	$(-2)(5+(-3))=(-2).5+(-2)(-3)$		
g)	$(-8).1=1.(-8)$		
h)	$5.(8-3)=5.8-5.(-3)$		
i)	$16+(-16)=(-16)+16=0$		

27. *Resuelve aplicando propiedad distributiva.*

Orden	Operaciones	Resultados
a)	$(-12+24-18):(-6)$	
b)	$(-3).(6-8+4-3)$	
c)	$(45-18+81):(-9)$	
d)	$(-35-42-63):(+7)$	
e)	$(-4)3+(-1)(-4)$	
f)	$(-2)(-5-3-1)$	
g)	$8(8-9+7)$	
h)	$(20+35-100):(-5)$	

i)	$(2+8-12):(-2)$	

28. Encontrar el inverso aditivo de los siguientes números.

Orden	Número	Inverso aditivo
a)	3	
b)	-5	
c)	18/3	
d)	-36,02	
e)	105,99999…	
f)	209/5	
g)	0,518	
h)	-1024	
i)	-5789/6	

29. Eliminar el signo de agrupación.

Orden	Operación	Resultado
a)	$+(-5)$	
b)	$-(-4)$	
c)	$-(+7)$	
d)	$-(+12)$	
e)	$+(+19)$	
f)	$-[-(-21)]$	
g)	$-[+(-354)]$	
h)	$-\{+[-(-56)]\}$	
i)	$\{-[-(96)]\}$	

30. Con los valores indicados para las variables x, y, z, w, resolver las operaciones que se indican.

Orden	x	y	z	w	$x-y$	$2y+z-w$	$3z-w$	$-\{xy-zw\}$
a)	-1	-5	-15	8				
b)	8	-9	3	-2				
c)	5	0	1	-5				
d)	0	-8	-6	-1				
e)	1	12	2	9				
f)	-1	-12	-2	-9				
g)	3	-3	3	-3				
h)	1	1	1	1				
i)	0	-2	-8	0				

31. *Efectuar el cálculo correspondiente.*

Orden	Operación	Resultado
a)	$25-8+4-9-3+10$	
b)	$5-9-7+4-6+8$	
c)	$-4-3+5-5-4-3+2+1$	
d)	$-18-9+14+24-10+21$	
e)	$(-5)-(-15)-(+5)$	
f)	$(-24)+(-12)-(-24)$	
g)	$-[+16-32+(32-96)]$	
h)	$-\{(-3+2-5+8)+[-(52-5-8+3)]\}$	
i)	$\{-(89-16)+[-(287)+32-15]\}$	

32. *Efectuar el cálculo correspondiente.*

Orden	Operación	Resultado
a)	$100-(81-14)$	
b)	$-61-(-3-12)$	
c)	$(15+71)-(21+18)$	
d)	$186+(321-542)+16$	
e)	$15-8+(32-25+42)$	
f)	$(15+61-35)-[18+(-15)]+2$	
g)	$\{-(16+21+25)-[(-9)+5]\}$	
h)	$-12-\{+32-(58-97)+2\}-5$	
i)	$-\{(-12)-(-10)-[18-(16+1)-(5+12)+3]-8+9\}$	

33. *Efectuar el cálculo correspondiente.*

Orden	Operación	Resultado
a)	$120+5(6-9)$	
b)	$19-3(4+8)$	
c)	$4(12-6)-5(7+3)$	
d)	$150:(7-12)$	
e)	$(35-15):(5-7)$	
f)	$(16-21-11):(-5+3)$	
g)	$[(+12)-5(3+4)-6(9-8)+(29-2):3]$	
h)	$\{(-61)-[(+2)+(-7)-(+14):7\}$	
i)	$[(-12)-(-20):5+18:3-24:12]$	

34. Efectuar las siguientes operaciones.

Orden	Operación	Resultado
a)	$13-2\{(+18-12)-36:6+18:9-12:3\}$	
b)	$16(9-6)+25:5-124:2+2(81:9)$	
c)	$-3[(18-30)+854:2-1020:5]$	
d)	$181-[(-12)(144:12)-2(175:(-5))]$	
e)	$-24+(-64:8)-5000:10+[32-15:3]$	
f)	$1200:(-5)+16(9-7)+\{(-15+5):10+205:5-2\}$	
g)	$-18:2-\{(25-10):3+12:2-(-8:(-4))+16\}$	
h)	$-[(1215:5).(9-8)+63:9-5]$	
i)	$\{-[132(2-1)+5000:10-1000\}$	

35. Resuelve las siguientes operaciones transformando cada número a su expresión fraccionaria.

Orden	Operación	Resultados
a.	$0,25+0,25+0,2\widehat{5}$	
b.	$(2,3-7,\widehat{2}):1,3\widehat{4}$	
c.	$1,3\widehat{4}:7,\widehat{2}-2,3)$	
d.	$\dfrac{(0,6:2,4)-(4,8:1,2)}{0,9:0,2}$	
e.	$\dfrac{(1,8:1,8)-(6,4:0,2)}{0,12:0,1}$	
f.	$\dfrac{1,26+3\left(0,\widehat{6}-1,75\right)}{0,18:0,253}$	
g.	$2,33:5-3,18.\left(8,\widehat{3}\right)$	
h.	$15-0,87+36,9-21,45$	
i.	$\dfrac{16,91}{0,4\widehat{7}(-5,24)}$	

36. Si $a=0,\widehat{3};b=\dfrac{2}{5};c=-5$, *calcula.*

Orden	Operación	Resultados
a.	$3a-bc$	
b.	$12ab-\dfrac{c}{5}$	
c.	$6a-52b-ac$	

d.	$(6a-bc)(c+5b)$
e.	$\frac{2a}{3b}-c$
f.	$5a-3b+\frac{2c}{-c}$
g.	$\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b-c$
h.	$\frac{5a-\frac{7}{3}b}{3a}$
i.	$\frac{2}{4}a+\frac{-2b+c}{-2b-c}$

37. Completar la siguiente tabla.

a	b	c	$a+b$	$2b-c$	$b+(-b)$	$\frac{b}{2c}$
$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{6}{6}$				
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{3}{1}$				
$0,25$	$\frac{3}{9}$	$-4,5$				
$12,5$	$3,999...$	$-\frac{4}{7}$				

38. Efectuar las siguientes operaciones combinadas.

Orden	Operación	Resultados
a.	$\frac{4}{5}-\frac{8}{9}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}$	
b.	$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{5}{7}$	
c.	$-\frac{5}{4}-2+\frac{20}{3}-\frac{5}{6}$	
d.	$\frac{75}{95}:12$	
e.	$\frac{2}{-9}:\frac{-8}{27}$	

f.	$\left(\dfrac{3-\dfrac{4}{2}}{-5+\dfrac{1}{4}}\right):2$
g.	$\dfrac{2}{9}:\left(-\dfrac{1}{6}-\dfrac{2}{3}\right)$
h.	$\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\right):\left(\dfrac{2}{6}:\dfrac{1}{5}\right)$
i.	$\left(\dfrac{7}{8}-\dfrac{2}{9}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
j.	$\left(\dfrac{-3}{4}\right)\cdot(+8)$
k.	$\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{8}\right):\dfrac{2}{5}$

39. Calcular.

Orden	***Operación***	***Resultado***
a.	*958 - 456 - 328 + 860 - 176 -218*	
b.	*128 + 576 - 280 + 2.100 - 350 + 185*	
c.	*420 x 2 + 526 + 120 x 3*	
d.	*(425 + 726 - 215) - (125 + 16 - 31) + 412*	
e.	$\left\{\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{6}\right)-5\left(\dfrac{1}{2}:\dfrac{3}{4}\right)\right\}$	
f.	$-5+\left\{3-\left[\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{4}\right]+3.\dfrac{6}{8}-\dfrac{16}{6}\right\}$	
g.	$-\left[\dfrac{6}{7}:\dfrac{12}{14}\right]+\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{3}\right)-2+\dfrac{3}{4}$	
h.	$-\dfrac{1}{6}\left\{\left(\dfrac{5}{3}-2\right)+\left(3-\dfrac{1}{4}\right)-5\right\}$	
i.	$6\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{10}{25}\right):\left(\dfrac{5}{8}:\dfrac{1}{8}\right)+5$	

40. Calcular.

Orden	*Expresión*	*Resultado*
a.	5^3	
b.	3.8^0	
c.	$(-4)^3$	
d.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$	
e.	$\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$	
f.	$\frac{7}{7^3}$	
g.	-3^2	
h.	$(-5)^4$	
i.	$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$	

41. Efectuar las operaciones. Escriba todas las respuestas en términos de exponentes.

Orden	***Operación***	***Expresión***
a.	$3^2.3^4$	
b.	$2^8.2^5$	
c.	$2^4.2^3.2^5$	
d.	$\left(2^3\right)^5$	
e.	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	
f.	$\frac{2^2.3^3}{2^5.3^7}$	
g.	$\left(\frac{4.3^8}{3^7}\right)^{-2}$	
h.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}$	
i.	$\left(\frac{3^2.2^4.5^6}{2^8.3^7.5^2}\right)^{-1}$	

42. Resolver las siguientes raíces.

Orden	***Expresión***	***Resultado***
a.	$\sqrt{25}$	

b.	$\sqrt{144}$
c.	$\sqrt[4]{81}$
d.	$\sqrt[5]{-243}$
e.	$\sqrt[3]{\dfrac{-27}{1000}}$
f.	$\sqrt{0,04}$
g.	$\sqrt{0,25}$
h.	$\sqrt[3]{-0,001}$
i.	$\sqrt[3]{0,125}$

43. *Operar para logra obtener una raíz única. Suponga que las letras son números reales.*

Orden	**Expresión**	**Resultado**
a.	$\sqrt{\sqrt{a}}$	
b.	$\sqrt[3]{x\sqrt{y}}$	
c.	$\sqrt[b]{\sqrt[a]{\sqrt{y}}}$	
d.	$\sqrt{\dfrac{4}{k}\sqrt[5]{k}}$	
e.	$\sqrt[2]{a^4}\sqrt{45.\sqrt{45.\sqrt{45}}}$	
f.	$\sqrt{(a+b)\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}}$	

44. *Simplificar exponentes e índices para llegar a una expresión más simplificada. Suponga que las letras representan números reales.*

Orden	**Expresión**	**Resultado**
a.	$\sqrt[3]{(a+b)^{3r}}$	
b.	$\sqrt[6]{\dfrac{729x^{12}y^3}{k^6}}$	
c.	$\sqrt[4]{\dfrac{16x^8(h+k)^2}{81}}$	
d.	$\sqrt[x^2]{a^x b^x}$	
e.	$\sqrt[3]{\dfrac{(a-b)^2}{a^6}}$	
f.	$\sqrt[3r]{(a+b)^3}$	

45. *Expresar en notación científica los siguientes números.*

Orden	Notación decimal	Notación científica
a.	45800000000	
b.	$0,0000000852$	
c.	1000	
d.	$-0,0000065842$	

46. Expresa en notación decimal los siguientes números.

Orden	Notación científica	Notación decimal
a.	*4. 10^{3}*	
b.	*-6,3456. 10^{-6}*	
c.	*5,112. 10^{-3}*	
d.	*1,43. 10^{-5}*	

47. Expresa en notación científica e indica el orden de magnitud:

Orden	Expresión	Notación científica
a.	*Distancia Tierra - Luna: 384 000 km.*	
b.	*Distancia Tierra - Sol: 150 000 000 km.*	
c.	*Distancia Tierra - Neptuno: 4 308 000 000 km.*	
d.	*Virus de la gripe: 0,000 000 002 2 m.*	
e.	*Radio del protón: 0,000 000 000 05 m.*	
f.	*Masa de un estafilococo: 0,000 000 000 1 g.*	
g.	*Radio del universo observable: 2,5 1010 años luz (expresarla primero en km)*	

48. Efectúa los siguientes cálculos

Orden	Expresión	Resultado
a.	$760000(20400000000)$	
b.	$(43200000)(850000000)$	
c.	$0,000035(0,00000076)$	
d.	$375000:(150000000)$	
e.	$79800:(840000000)$	
f.	$(0,00048):(0,0000003)$	
g.	$6,4\ .10^{5}+6,2\ .10^{5}-7,36\ .10^{5}=$	
h.	$3,84\ 10^{-2}-6,31.10^{-2}+8,32\ .10^{-2}=$	

49. Escribir los siguientes logaritmos en forma exponencial.

Orden	Forma exponencial	Forma Logarítmica
a.	$\log_6 216=3$	
b.	$\log_7 16807=5$	
c.	$\log_2 \frac{1}{32}=-5$	
d.	$\log_8 2048=\frac{11}{3}$	
e.	$\log_9 6561=4$	

f.	$\log_{1/7} \frac{1}{49} = 2$	
g.	$\log_3 \frac{1}{243} = -5$	
h.	$\log_4 16 = 2$	
i.	$\log_9 2187 = \frac{7}{2}$	

50. Escribir cada expresión en forma exponencial en forma logarítmica.

Orden	Forma exponencial	Forma Logarítmica
a.	$5^4 = 625$	
b.	$4^3 = 64$	
c.	$5^{-3} = \frac{1}{125}$	
d.	$4^{7/2} = 128$	
e.	$3^5 = 243$	
f.	$2^7 = 128$	
g.	$3^{-5} = \frac{1}{143}$	
h.	$11^2 = 121$	
i.	$12^2 = 144$	

51. Con calculadora evaluar cada una de las expresiones.

Orden	Expresión	Resultado
a.	$\log_{10} 5$	
b.	$\log_{10} 615$	
c.	$\log_{10} 4$	
d.	$\log_{10} 1267$	

52. Escriba cada logaritmo como la suma o resta de dos o más logaritmos.

Orden	Expresión	Resultado
a.	$\log \frac{2}{3}$	
b.	$\log_{10} 615$	
c.	$\log_{10} \frac{2ax}{3y}$	
d.	$\log_{10} \frac{4bc}{3xy}$	
e.	$\log \frac{7}{8}$	

f.	$\log_8 \frac{81}{6}$	
g.	$\log_{12} \frac{1}{5}$	
h.	$\log \frac{9}{6}$	
i.	$\log_2 18$	

53. Expresar los siguientes logaritmos como un solo logaritmo.

Orden	***Expresión***	***Resultado***
a.	$\log\ 2 + \log 11$	
b.	$\log_{10} 17 + \log_{10} 23$	
c.	$5\log_6 2 + 3\log_6 5$	
d.	$\log \frac{2}{3} + \log \frac{6}{7}$	
e.	$\log_{10} 25 - \log_{10} 5$	
f.	$7\log 3 - 2\log 8$	
g.	$\log_{10} 64 + \log_{10} 12$	
h.	$\log \frac{3}{24} + \log \frac{4}{7} - \log \frac{1}{3}$	
i.	$\log_{12} 3 - \log_{12} 81$	

54. Si $\log_b 2 = 0,3869; \log_b 3 = 0,6131; \log_b 5 = 0,8982$, *determine el valor de cada logaritmo de los dados.*

Orden	***Expresión***	***Resultado***
a.	$\log_b 8$	
b.	$\log_b 15$	
c.	$\log_b 36$	
d.	$\log_b 30$	
e.	$\log_b 10$	
f.	$\log_b 60$	

g.	$\log_b \frac{5}{3}$
h.	$\log_b \frac{45}{8}$
i.	$\log_b \frac{24}{5}$

55. *Utilizando la fórmula de cambio de base calcular los siguientes logaritmos.*

Orden	*Expresión*	*Resultado*
a.	$\log \frac{2}{3}$	
b.	$\log_{10} 51$	
c.	$\log_{15} \frac{2}{3}$	
d.	$\log_8 \frac{14}{31}$	
e.	$\log \frac{7}{8}$	
f.	$\log_8 \frac{81}{6}$	
g.	$\log_{12} \frac{1}{5}$	
h.	$\log \frac{9}{6}$	
i.	$\log_2 18$	

56. Resolver las siguientes operaciones combinadas.

Orden	*Expresión*	*Resultado*
a.	$\left\{\frac{1}{4}+5-\left[\frac{2}{3}-\frac{16}{3}\left(5+16-4+\frac{1}{3}\right)\right]+2\right\}$	
b.	$3{,}8^0+\left(\frac{3}{2}:\frac{4}{3}\right)^{-2}$	
c.	$\frac{2}{7}:(-4)^3+6-\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$	
d.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\left(\sqrt{16+9}\right)^{-2}+32$	
e.	$-\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}+\frac{1}{4}\left(\sqrt{81}-42\right)^2+15-\left(\frac{\sqrt{25}}{3}\right)^{-1}\right\}$	

f.	$\frac{7}{7^3}-\sqrt{\frac{49}{16}}+5{,}3-\left(\frac{5}{3}:\frac{3}{5}\right)^0$	
g.	$-3^2+\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}\left(\frac{6}{4}\right)^2:\left(\frac{\sqrt{36}}{2}\right)^1$	
h.	$\sqrt{26+10}\,(-5)^4-\left(\frac{25}{3}-\frac{6}{3}+\frac{16}{6}\right)^{-1}$	
i.	$\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}\left(\frac{8}{\sqrt{64}}:\frac{\sqrt{16}}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$	

Ejercicios Extras de operaciones combinadas con respuestas.

1) $\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}$ =

2) $\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{15}-\frac{3}{5}\cdot\frac{20}{18}$ =

3) $\frac{3}{8}:\frac{18}{24}-\frac{5}{6}$ =

4) $(\frac{3}{5}+\frac{1}{10}):\frac{-14}{15}$ =

5) $\frac{-4}{5}\cdot(\frac{7}{3}-\frac{5}{4})$ =

6) $(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}):\frac{5}{6}$ =

7) $\frac{12}{18}:(\frac{-1}{2}+\frac{3}{8})$ =

8) $(-1\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}):\frac{12}{5}$ =

9) $-3\frac{3}{10}:(7\frac{5}{6}-4\frac{9}{10})$ =

10) $1\frac{3}{8}-(\frac{7}{3}-\frac{1}{12})$ =

11) $(4\frac{1}{2}-5\frac{1}{3})-\frac{7}{8}$ =

12) $(\frac{4}{5}-2)-(\frac{3}{8}+\frac{-5}{6})$ =

13) $\frac{-7}{8}:\frac{1}{2}-[-\frac{3}{8}+(\frac{3}{5}-\frac{2}{3})$ =

14) $(-\frac{3}{8}+1):(\frac{-7}{3}\cdot\frac{3}{4}+1)$ =

15) $\frac{3}{4}\cdot\frac{-2}{9}-1\frac{1}{2}+\frac{7}{8}:\frac{7}{3}$ =

16) $7\frac{1}{2}+8\frac{1}{5}-6\frac{1}{4}+2\frac{1}{10}$ =

Respuestas:

1) $\frac{5}{4}$ 2) $-\frac{4}{9}$ 3) $-\frac{1}{3}$ 4) $-\frac{3}{4}$ 5) $-\frac{13}{15}$ 6) $-\frac{3}{10}$ 7) $-\frac{16}{3}$ 8) $-\frac{115}{72}$

9) $-\frac{9}{8}$ 10) $-\frac{7}{8}$ 11) $-\frac{41}{24}$ 12) $-\frac{89}{120}$ 13) $-\frac{157}{120}$ 14) $-\frac{5}{6}$ 15) $-\frac{31}{24}$ 16) $\frac{231}{20}$

Autoevaluación

Actividad N° 1: Indicar a que conjunto numérico pertenecen los siguientes números:

Números	**N**	**Z**	**Q**	**I**	**R**
a) $0,3.10^{-4}$					
b) $\frac{1}{2}-\pi$					
c) $\frac{1}{4}-\frac{2}{8}$					
d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{1}$					
e) $\sqrt{16+9}$					

Actividad N° 2: Indicar el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:

Números	**Verdadero**	**Falso**
a) $6,23.10^{-4} \in \mathbb{N}$		
b) $-5\pi \in$ □		
c) $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right) \in \mathbb{R}$		
d) $\left(\frac{3}{15}\right)^{2} \in \mathbb{Z}$		
e) $\sqrt{25-23} \in I$		

Actividad N° 3: Resolver los siguientes ejercicios:

$$a)\left\{-\left[\frac{5}{7}-\frac{3}{2}\right]^{1}+\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{9}-0,5\right)3-\sqrt{64}\,\frac{3}{4}+5-\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=$$

$$b)\frac{3,5.10^{-3}.(-7,5).10^{6}}{0,25.10^{4}}$$

$$c)(-5)^{3}-(-216):(-6)^{2}-(-2)^{4}.\sqrt{100-64}=$$

$$d)\frac{5,1.10^{-2}*3,4.10^{-3}}{1,3.10^{4}}$$

$$e)\log_{7}\frac{3}{5}$$

$$f)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-1}:\left(\frac{7}{4}:\frac{14}{8}-\frac{3}{2}.\frac{12}{4}\right)=$$

Bibliografía

[1] Stewart, James, CÁLCULO DE UNA VARIABLE, sexta edición Cengage Learning – Edición 2008.
[2] Sullivan, Michael, PRECALCULO. Prentice Hal. Edición 2006.
[3] Anton, Howard, INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL, Limusa. Edición 2016.

Guía de Aprendizaje de Expresiones Algebraicas

2025

Lic. Esp. Fernando Javier Quiroga Villegas

Guía de Aprendizaje de Expresiones Algebraicas

EDICIÓN DIGITAL

Villa Mercedes - San Luis, Republica Argentina, Diciembre 2024.

Guía de Aprendizaje de Expresiones Algebraicas

EDICIÓN DIGITAL

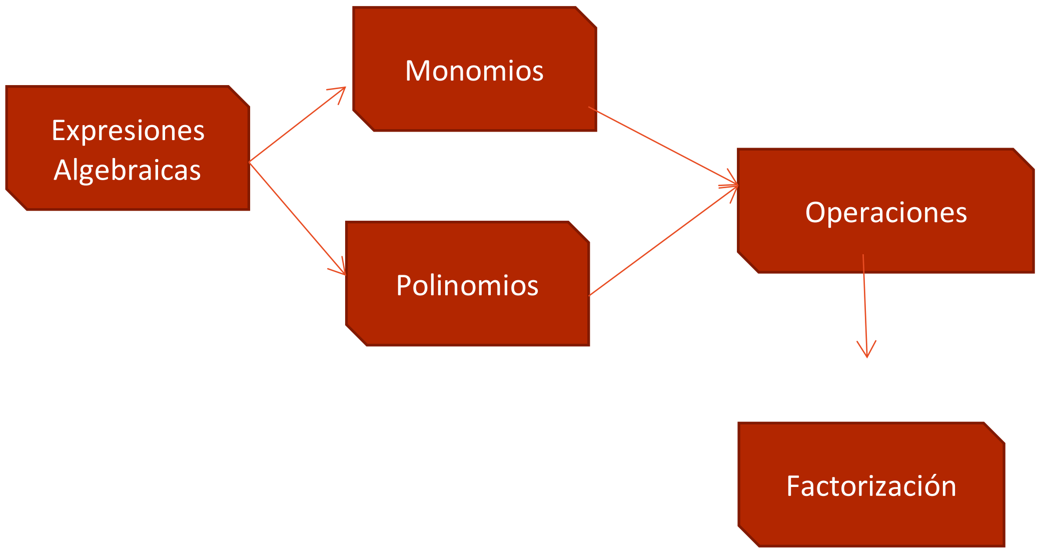
Lic. Esp. Fernando Javier Quiroga Villegas

Fernando Javier Quiroga Villegas, docente efectivo de la Universidad Nacional de San Luis de la asignatura Matemática para las carreras de Técnico Universitario en Mantenimiento Industrial, Licenciatura en Bromatología de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias y de Técnico Universitario en Gestión Financiera de la Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales de la Universidad Nacional de San Luis.

Contenido

Introducción

Como en todos los módulos tratados comenzamos con un diagrama de los temas que desarrollaremos. El itinerario para realizar es el siguiente:



El que sabe dónde va, es seguro que llega.

¡Comenzamos!

Expresiones Algebraicas

El resultado de aplicar una o más veces cualquier operación algebraica (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación) a una combinación de letras y números es una expresión algebraica.

Por ejemplo, las siguientes son expresiones algebraicas

$$4x^2y; \quad \frac{3ts^2+1}{ts}; \quad \frac{\sqrt{2}x+5}{x^2+2y}; \quad \sqrt{3x+1}.$$

Podemos observar en álgebra que se emplean letras y otros símbolos para representar números. Esta combinación de letras y números se encuentran ligadas por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Dependiendo las operaciones que afectan a las ***variables*** *las expresiones algebraicas se pueden clasificar en:*

- **Enteras**: Cuando las variables no están afectadas por el signo radical ni forman parte del denominador.
- **Fraccionarias o racionales**: Cuando al menos una de las variables figura en el denominador.
- **Irracionales**: Cuando las variables están afectadas por el signo radical.

En este curso daremos tratamiento solo a las *expresiones algebraicas enteras e identificará las dos restantes cuando comprenda mejor el concepto de variable.*

Variables

Cuando se emplea una letra u otro símbolo para indicar algo a lo cual puede asignarse cualquier valor de un conjunto de números dado o implícito, se llama variable. Generalmente vamos a usar las letras más cercanas al final, como w,x,y,z, se utilizan para indicar variables.

De las siguientes expresiones:

$$a)\ 4x^2y;\quad b)\ \frac{3ts^2+1}{ts};\ \text{c)}\ \frac{\sqrt{2}x+5}{x^2+2y};\ \text{d)}\ \sqrt{3x+1}$$

En a), c) y d) las variables son e y, en b) las variables son t y s.

Constantes

Cuando se emplea una letra u otro símbolo para designar números fijos, pero no especificados, llamamos a estos constantes. Una de las constantes más conocidas es la representada mediante el símbolo πque representa el número 3,14159265…. Por lo general se representan con las letras a,b,c,d (las primeras letras del alfabeto).

En las siguientes expresiones podemos observar:

- $5ax^2$, *la variable es x y la constante es a.*
- $\frac{3}{2}x\pi y$, *la variable es$x$ ey; y la constante es π.*

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. *¿Qué es una expresión algebraica?*
2. *¿Cómo se clasifican las expresiones algebraicas?*
3. *¿Cuándo una expresión algebraica es entera?*
4. *¿Cuándo una expresión algebraica es racional?*
5. *¿Cuándo una expresión algebraica es irracional?*
6. *¿A qué definimos como variable?*
7. *¿Qué es una constante?*
8. *¿Con qué letras denotamos las variables?*
9. *¿Con qué letras denotamos las constantes?*

Términos Algebraicos

Si una expresión algebraica consiste en partes unidas por signos más o signos menos, se le llama suma algebraica. Cada una de las partes de una suma algebraica, junto con el signo que la precede, se llama término algebraico.

- *Si un término no es precedido por ningún signo entonces es positivo.*

Cada término algebraico tiene dos partes:

- *Una de ellas es el coeficiente, y*
- *la otra contiene las variables o constantes y la denominaremos parte literal.*

Cuando las variables o constantes no están precedidas por ningún coeficiente entendemos que el coeficiente que posee es 1.

- **El coeficiente del término $4x^2$ es cuatro.**
- **El coeficiente del término s^3t^2 es 1.**
- **El término 3, el coeficiente es 3 y la parte literal es nula.**

Términos semejantes

Los términos semejantes son aquellos términos en los cuales intervienen exactamente las mismas variables elevadas exactamente a la misma potencia.

Ejemplo:

- $7xy^2$ es semejante al término $-2y^2x$, son términos semejantes porque ambos contienen las mismas variables x e y, ambas están elevadas a la misma potencia.

Los siguientes términos son semejantes:

- $8z^3x^2; \quad -12z^3x^2$
- $3t^3; 18\pi t^3; -26t^3$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. ¿Qué es una suma algebraica?
2. ¿Qué es un término algebraico?
3. ¿Si un término no es precedido por ningún signo, cómo debemos considerar al término algebraico?
4. ¿Cuáles son las partes del término algebraico?
5. ¿Si en un término algebraico su parte literal no está precedida por ningún coeficiente que se asume?
6. ¿Cuándo dos términos son semejantes?
7. ¿Si dos términos semejantes importan el coeficiente de dichos términos?

Monomios y Polinomios

Una expresión algebraica con un solo término es un monomio.

Ejemplo:

- **Son monomios:** $\mathbf{16\pi x^2}$; $\mathbf{-5xy^2z^3}$; $\mathbf{18x^5y^8}$

Una expresión algebraica con dos términos es un binomio.

Ejemplo:

- Son binomios: $3x + 5y$; $-7y^3 + 8z^2$; $12xy^2 + 32$

Una expresión algebraica con tres términos es un trinomio.

Ejemplo:

- Son trinomios: $3x^2 - 5x + 1$; $16xy - y + x$; $-5y^3 + z^2 + x$

Una expresión algebraica con cuatro términos es un cuatrinomio.

Ejemplo:

Son cuatrinomios:

- $3x^3 + 2x^2 - 5x - 2$
- $16x + 5y + x^2 + y^5$
- $-xy + 12x^2 - 6y^3 + 3$

Una expresión con más de cuatro términos es un polinomio.

Cualquier expresión algebraica con más de 4 términos diremos que es un polinomio, analizaremos su definición y partes más adelante.

Partes de un monomio

El** coeficiente **del monomio es el número que aparece multiplicando a la parte literal (variable ó constante).

Ejemplo:

- $18x^3y$el coeficiente es 18,
- $-3w^2st^3$ el coeficiente es -3.
- xy^2z^3 , en este caso el coeficiente es 1.

La** parte literal **está constituida por las letras y sus exponentes.

Ejemplo:

- $18ax^3y$la parte literal es ax^3y
- $-3w^2st^3$ la parte literal es w^2st^3.

***El** grado **de un monomio es la suma de todos los exponentes de las** variables.*

Ejemplo:

- $18ax^3y$, es de grado 4; 3 + 1 = 4. Tenga en cuenta que **a** es un constante
- $-3b^3w^2st^3$ es de grado 6; 2 + 1 + 3 = 6 correspondiente a las variables w, s, t.
- $8x^3y^3z^2$ es de grado 8; 3 + 3 +2 = 8. En este monomio no hay constantes y las variables son x, y, z.

Polinomio

Un polinomio es una suma algebraica de monomios, es decir, cuando varios monomios están unidos por los operadores + y – (adición o sustracción).

Ejemplo:

- $x^2y^3 + 3x - 3y + x^6y^2 - 1$
- $z^5 + y^4 + 2xy + 2y - yx - y$
- $\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + 1$

El grado de un polinomio es: el grado del término o monomio de mayor grado. *Se debe tener en cuenta que el grado está dado por la suma de los* ***exponentes de las variables*** *y no deben ser tenidos en cuenta para su cálculo los exponentes de las constantes.*

Ejemplo:

- $x^2y^3 + 3x - 3y + x^6y^2 - 1$ es de grado 8, el grado está dado por el término x^6y^2.
- $z^5 + y^4 + 2xy + 2y - yx - y$ es de grado 5, el grado está dado por el término z^5
- $\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + 1$, es de grado 3, el grado está dado por el término $\frac{1}{4}x^3$.

El polinomio homogéneo tiene todos sus términos o monomios con el mismo grado.

Ejemplo:

- $P(x, y) = 2x^2 + 3xy$
- $P(x, y, z) = 8x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + xz^3$

Los *términos* ***de un polinomio heterogéneo son de distinto grado.***

Ejemplo:

- $P(x, y, z) = -5x^3yz + x^2z^2 + 1$
- $P(x, y) = -5y^8 + y^3 - \frac{5}{4}x$
- $P(y, z) = z^3y - 2z^2y^3 - z + 1$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Defina monomio, binomio, trinomio y cuatrinomio.
2. ¿Cuáles son las partes de un monomio?
3. ¿Cómo está constituida la parte literal de un monomio?
4. ¿Cómo se calcula el grado de un monomio?
5. ¿Se tienen en cuenta el exponente de las variables al momento de calcular el grado de un monomio?
6. ¿Se tienen en cuenta el exponente de las contantes al momento de calcular el grado de un monomio?
7. ¿Qué es un polinomio?
8. ¿Cómo se calcula el grado de un polinomio?
9. ¿Cuándo un polinomio es homogéneo?
10. ¿Cuándo un polinomio es heterogéneo?

Polinomio de una variable real

Un *polinomio* ***de una variable real es una expresión algebraica de la forma:*** $\boldsymbol{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}$.

Siendo $\boldsymbol{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n}$ ***números, llamados*** *coeficientes.*

$\boldsymbol{n}$ *un número natural.*

$\boldsymbol{x}$ *la variable o indeterminada.*

$\boldsymbol{a_n}$ *es el coeficiente principal.*

$\boldsymbol{a_0}$ *es el término independiente.*

Ejemplo:

- $P(x) = 3x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 1$

Es un polinomio de variable x, cuyo coeficiente principal es 3 y su término independiente es 1.

- $P(y) = -5y^2 + y^5$

Es un polinomio de variable y, cuyo coeficiente principal es 1 y su término independiente es 0.

Para tener en cuenta: El coeficiente principal es el coeficiente del término de mayor grado.

El *grado* ***de un polinomio P(x) es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable.***

Ejemplo:

- $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ *tiene grado 3.*
- $P(x) = -5y^2 + y^5$ *tiene grado 5.*

El *polinomio nulo* ***tiene todos sus coeficientes nulos.***

Ejemplo:

- $P(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

Un *polinomio es* ***completo respecto a una variable y de grado n, si el polinomio está compuesto por n + 1 monomios de grado n hasta el grado 0.***

Ejemplo:

- $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3$
- $P(x) = 12x^2 - 12x + 12$

Un polinomio está ordenado si los monomios que lo forman están escritos de mayor a menor grado.

Ejemplo:

- $P(x) = 3x^3 + 8$
- $P(x) = 2x^2 - 2x - 6$

El valor numérico de un polinomio es el resultado que obtenemos al sustituir la variable por un número cualquiera.

Ejemplo:

- $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ en $x = 1$
  - $P(1) = 2.1^3 + 5.1 - 3 = 2 + 5 - 3 = 4$
- $Q(x) = 3x^3 + 2x - 5$ en $x = 2$
  - $P(2) = 3.2^3 + 2.2 - 5 = 23$

Dos polinomios son iguales si verifican:

- ***Ambos polinomios tienen el** mismo grado.*
- ***Los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales.***

Ejemplo:

- $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$
- $Q(x) = 5x + 2x^3 - 3$
- $R(x) = -3 + 2x^3 + 5x$
- $P(x) = Q(x) = R(x)$

Actividad de Aprendizaje

1. *¿A qué definimos como polinomio de una variable real?*
2. *Dado el siguiente polinomio identificar los coeficientes, el coeficiente principal, las variables y el término independiente:* $6x^5 - 4x^3 + 2x + 1$.
3. *¿Cuál es el grado del polinomio?*
4. *¿Cuándo un polinomio es nulo?*
5. *¿Cuándo decimos que un polinomio es completo?*
6. *¿Cuándo decimos que un polinomio es ordenado?*
7. *¿Un polinomio puede estar completo y no ordenado? Ejemplifique.*
8. *¿Un polinomio puede estar ordenado y no completo? Justifique.*
9. *¿Cómo se obtiene en valor numérico de un polinomio?*
10. *¿Cuándo dos polinomios son iguales?*

PAUSA. Es conveniente que realicemos una pausa. Es la primera pausa en este módulo

Pausa de Recapitulación

1. *¿A qué denominamos expresión algebraica?*
2. *¿Cómo se identifican las constantes de una expresión algebraica?*
3. *¿Cómo se identifican las variables de una expresión algebraica?*
4. *Defina término algebraico.*
5. *Defina término semejante.*
6. *Confeccione un listado clasificando las expresiones algebraicas de acuerdo con la cantidad de términos.*
7. *Identifique las partes de un monomio. Defina cada una de ellas.*
8. *¿Qué es un polinomio?*

9. *¿Cuál es el grado de un polinomio?*
10. *¿Cuándo indicamos que dos polinomios son semejantes?*
11. *¿Cómo se identifican polinomios homogéneos y heterogéneos?*
12. *Defina polinomio de una variable real.*
13. *¿Cuándo un polinomio es nulo?*
14. *De tres ejemplos de polinomios completos.*
15. *¿Cuándo dos polinomios son iguales?*

Actividad de Producción

1. Dados los siguientes monomios encontrar los datos que se solicitan.

Orden	Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
a.	$3x^2y$			
b.	z^3y^2			
c.	$-5zx^4$			
d.	12			
e.	$-2zx^5y^6$			
f.	$8zw^{-3}$			
g.	$-xy$			
h.	-8			
i.	$5x^{-5}$			

2. Clasificar los siguientes polinomios de acuerdo con la cantidad de términos.

Orden	Polinomio	Coeficiente principal	Grado	Término independiente
a.	$13x^3y^2$			
b.	$3x^3+2$			
c.	$-5x^4+x^2$			
d.	$2x^2+5x-1$			
e.	$-2x^5+x^6+8$			
f.	$8w^3+2w^2-3w+5$			
g.	$-x^6+5x^5+4x^4-x^3+x^2-x+3$			
h.	-14			
i.	$15x^3$			

3. Dado el término propuesto encontrar un término semejante.

Orden	Polinomio	Término Semejante
a.	$-x^3$	
b.	$33x^7$	
c.	$-15x^4$	
d.	$25x$	
e.	$4x^6$	
f.	$-18w^9$	
g.	$-24x^6$	
h.	-14z^8	
i.	$-6x^9$	

4. Completar y ordenar los siguientes polinomios.

Orden	Polinomio	Polinomio Completo
a.	$3x^3 + 2$	
b.	$-8x^8 + 2x + 5$	
c.	$-x^4 + 2x^2 - x + 1$	
d.	$12x^2 + 15x - 5$	
e.	$x^5 + x^6 + 8x - 3$	
f.	$8w^3 - 2w^2 - 3w + 5$	
g.	$-x^6 + 5x^5 + 4x^4 - x^3 + x^2 - x + 3$	
h.	$5x^3 + 2x - 8$	
i.	$20x^3 - 3x + 1$	

5. Encontrar el valor numérico de los siguientes polinomios.

Orden	Polinomio	Valor	Resultado
a.	$P(x) = 3x^3 + 2$	P(2)	
b.	$P(x) = -8x^8 + 2x + 5$	P(1)	
c.	$P(x) = -x^4 + 2x^2 - x + 1$	P(-1)	
d.	$P(x) = x^2 + 15x - 5$	P(-2)	
e.	$P(x) = x^5 + x^6 + 8x - 3$	P(0)	
f.	$P(w) = 8w^3 - 2w^2 - 3w + 5$	P(3)	
g.	$P(x) = 5x^5 + 4x^4 - x^3 + x^2 - x + 3$	P(1)	
h.	$P(x) = 5x^3 + 2x - 8$	P(-1)	
i.	$P(x) = 20x^2 - 3x + 1$	P(0)	

Esperamos que no tenga dificultad en la resolución de las actividades planteadas.

Es momento de continuar.

Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar polinomios, sumamos o restamos los coeficientes de términos semejantes.

<u>Recuerde</u> que solo se pueden sumar o restar términos semejantes.

Ejemplo:

- $P(x) = 3x^2 + 5x - 3$
- $Q(x) = -2x^2 + x + 1$

$$P(x) + Q(x) = 3x^2 - 2x^2 + 5x + x - 3 + 1 = x^2 + 6x - 2$$

$+3x^2$	$+5x$	-3
$-2x^2$	$+x$	$+1$
x^2	$+6x^2$	-2

- $R(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 3$
- $S(x) = 7x^3 + 2x^2 + 3$

$+x^4$	$+3x^3$	$-2x^2$	$-x$	-3
	$+7x^3$	$+2x^2$		$+3$
x^4	$+10x^3$	$+0x^2$	$-x$	$+0$

$$R(x) + S(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^3 - 2x^2 + 2x^2 - x - 3 + 3$$
$$x^4 + 10x^3 + 0x^2 - x + 0$$

Para restar dos polinomios $P(x) - Q(x)$:

1. ***Transformamos la resta, en suma, es decir, $P(x) + (-Q(x))$. Esto nos lleva a obtener el polinomio opuesto de $Q(x)$ cambiando los signos de todos los términos del polinomio $Q(x)$.***
2. ***Sumamos los términos semejantes***

Ejemplo:

- $P(x) = 3x^2 + 5x - 3$
- $Q(x) = -2x^2 + x + 1$

$$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x)) = 3x^2 + 2x^2 + 5x - x - 3 - 1$$

$+3x^2$	$+5x$	-3
$2x^2$	$-x$	-1

$5x^2$	$+4x^2$	-4

- $R(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 3$
- $S(x) = 7x^3 + 2x^2 + 3$

$+x^4$	$+3x^3$	$-2x^2$	$-x$	-3
	$-7x^3$	$-2x^2$		-3
x^4	$-4x^3$	$-4x^2$	$-x$	-6

$$R(x) - S(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^3 - 2x^2 - 2x^2 - x - 3 - 3 =$$
$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - x - 6$$

Multiplicación de monomios

Cuando multiplicamos monomios, se multiplican los coeficientes numéricos para obtener el coeficiente numérico del producto luego se multiplican los factores restantes utilizando las reglas de los exponentes.

Ejemplo:

- $(2x^3)(-8x^6y) = -16x^9y$
- $(3x^2y^2z)(x^3z^5) = 3x^5y^2z^7$
- $7x(-3y^3)(-2x^2y^2) = 42x^3y^5$

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar un polinomio por otro, cada término de un polinomio se multiplica por cada término del otro polinomio. Puede ayudarse, dependiendo de la cantidad de término, usando la propiedad distributiva.

Ejemplo:

- Dado $P(x) = -4x^3 + 5x^2 + x - 1$ y $Q(x) = 3x^2 - x + 6$. Encontrar $P(x).Q(x)$

$$-4x^3 + 5x^2 + x - 1$$

x $\quad 3x^2 - x + 6$

$$-\,-$$

$$-24x^3 + 30x^2 + 6x - 6$$
$$4x^4 - 5x^3 - x^2 + x$$
$$-12x^5 + 15x^4 + 3x^3 - 3x^2$$

$$-\,-$$

$$-12x^5 + 19x^4 - 26x^3 + 26x^2 + 7x - 6$$

- Dado $R(x) = 2a^3 - 3a^2b + 4ab^2 - 2b^3$ y $S(x) = 3a^2 + 4ab - 5b^2$. Encontrar $R(x).S(x)$

$$2a^3 - 3a^2b + 4ab^2 - 2b^3$$
$$3a^2 + 4ab - 5b^2$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$6a^5 - 9a^4b + 12a^3b^2 - 6a^2b^3$$
$$8a^4b - 12a^3b^2 + 16a^2b^3 - 8ab^4$$
$$-10a^3b^2 + 15a^2b^3 - 20ab^4 + 10b^5$$

$$- -$$

$$6a^5 - a^4b - 10a^3b^2 + 25a^2b^3 - 28ab^4 + 10b^5$$

El producto especial $(a+b)(a-b)$

Dado un binomio $(a+b)$, definiremos a su conjugado como $(a-b)$. E producto entre $(a+b)(a-b)$ se conoce como diferencia de cuadrados. Si observamos cada término tiene el mismo primer término a, y que los segundos términos son inversos aditivos uno del otro, by $-b$. Siempre que se tiene un producto de dos binomios de la forma $a+b$y $a-b$, el resultado es a^2-b^2.

Ejemplo:

- $(x-2)(x+2) = x^2 + \boxed{2x} - \boxed{2x} - 4 = x^2 - 4$
- $(2x+4)(2x-4) = 4x^2 - \boxed{8x} + \boxed{8x} - 16 = 4x^2 - 16$
- $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}x^4 - \boxed{\frac{1}{8}x^2} + \boxed{\frac{1}{8}x^2} - \frac{1}{16} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{16}$

El producto especial $(a+b)^2$

A este producto especial se lo conoce como binomio cuadrado perfecto. Recuerde que $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El resultado contiene el cuadrado del primer término más el duplo del primero por el segundo más el segundo término al cuadrado.

Ejemplo:

- $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$
- $(2x-8)^2 = 4x^2 - 32x + 64$
- $\left(\frac{2}{3}x^3 + 6\right)^2 = \frac{4}{9}x^6 + \frac{24}{3}x^3 + 36$

División entre monomios

Se divide el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor y a continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene en el dividendo y el exponente que tiene en el divisor. El signo lo da la ley de signos.

Ejemplo:

- $4ax^4y^3 : 2x^2y = \frac{4ax^4y^3}{2x^2y} = 2ax^2y^2$
- $6x^8y^7 : 2xy^5 = \frac{6x^8y^7}{2xy^5} = 3x^7y^2$
- $16x^5y^3z^6 : 15xz^4 = \frac{16x^5y^3z^6}{15xz^4} = \frac{16}{15}x^4y^3z^2$

División de un polinomio entre un monomio

Se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio separando los términos del polinomio con sus propios signos. Es decir, aplicamos la propiedad distributiva para la división.

Ejemplo:

- $(4x^3 + 6x^2 - 8x) : (2x)$
$$= \frac{4x^3}{2x} + \frac{6x^2}{2x} - \frac{8x}{2x}$$
$$= 2x^2 + 3x - 4$$
- $(6x^4y - 9x^3y^2 - 6xy^4) : (3xy)$
$$= \frac{6x^4y}{3xy} - \frac{9x^3y^3}{3xy} - \frac{6xy^4}{3xy}$$
$$= 2x^3 - 3x^2y^2 - 2y^3$$
- $(3x^3y^2 + 5x^2y - 6xy^2) : (4x^2y)$
$$= \frac{3x^3y^2}{4x^2y} + \frac{5x^2y}{4x^2y} - \frac{6xy^2}{4x^2y}$$
$$= \frac{3}{4}xy + \frac{5}{4} - \frac{6}{4}x^{-1}y$$

División entre dos polinomios.

Para dividir dos polinomios primero debemos ordenar y completar el dividendo y seguimos la siguiente regla:

1. **Se divide el primer término del dividendo y el primer término del divisor y obtenemos el primer término del cociente.**
2. **Este primer término del cociente se multiplica por cada término del divisor y el producto se *resta* del dividendo, para lo cual se le cambia el signo escribiendo cada término debajo del semejante. Si el término de este producto no tiene término semejante en el dividendo se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo.**
3. **Con el resto obtenido seguimos dividiendo el primer término del resto y el primer término del divisor multiplicamos este nuevo término del cociente por cada término del divisor y restamos del dividendo.**
4. **Este procedimiento se realiza hasta que la potencia del nuevo dividendo sea *menor* que la potencia del divisor.**

Ejemplo:

- $(15x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 7x - 3) : (5x^2 + x - 3)$

$$
\begin{array}{rl}
15x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 7x - 3 & \boxed{5x^2 + x - 3} \\
-15x^4 - 3x^3 + 9x^2 \qquad\qquad & 3x^2 - 2x + 1 \\
\hline
-10x^3 + 3x^2 + 7x - 3 & \\
10x^3 + 2x^2 - 6x \quad & \\
\hline
5x^2 + x - 3 \quad & \\
\text{-}5x^2 - x + 3 \quad & \\
\hline
0 \quad &
\end{array}
$$

- $(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) : (x^2 - 3x + 3)$

$$
\begin{array}{rl}
x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6 & \boxed{x^2 - 3x + 3} \\
-x^4 + 3x^3 - 3x^2 \qquad\qquad & x^2 - 2x + 2 \\
\hline
-2x^3 + 8x^2 - 12x + 6 & \\
+2x^3 - 6x^2 + 6x + 6 & \\
\hline
+2x^2 - 6x + 12 & \\
-2x^2 + 6x - 12 & \\
\hline
0 \quad &
\end{array}
$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. *Verifique la comprensión de las operaciones entre polinomios, para ello le sugerimos analice uno por uno los ejemplos aportados y verifique si los resultados alcanzados son correctos. En algunos de ellos se han deslizado errores que esperamos los identifique y analice.*

Regla de Ruffini

Si el** divisor es un binomio de la forma **$x \pm a$**, **entonces utilizamos un** método más breve **para hacer la** división**, llamado** regla de Ruffini**.

Resolver por la regla de Ruffini la división: $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

1. **Si el polinomio no está completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.**
2. **Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea.**
3. **Abajo a la izquierda colocamos el término independiente del divisor cambiado de signo. En nuestro caso es -3, como lo cambiamos de signo nos queda 3.**
4. **Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.**

	1	**0**	**-3**	**0**	**2**
3					
	1				

5. **Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.**

	1	0	-3	0	2
3		3			
	1				

6. **Sumamos los dos coeficientes.**

	1	0	-3	0	2
3		3			
	1	3			

7. **Repetimos el proceso anterior.**

	1	0	-3	0	2
3		3	9		
	1	3	6		

Repetimos el proceso.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	
	1	3	6	18	

Repetimos.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	**56**

8. **El último número obtenido**, 56, **es el resto**.

9. **El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.**

$$C(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 18$$

Resto = 56

- $(x^5 \; - 32) : (x - 2)$

	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**-32**
2		**2**	**4**	**8**	**16**	**32**
	1	**2**	**4**	**8**	**16**	$\boxed{\mathbf{0}}$

$$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$$

R = 0

División por x-a. Teorema del Resto.

El resto de la división de un polinomio P(x), entre un polinomio de la forma ($\boldsymbol{x \pm a}$) es el valor numérico de dicho polinomio para el valor: x = -a, es decir, evaluar el polinomio en –a, P(-a). Esta regla se conoce como Teorema del resto.

Para tener en cuenta: Si se puede aplicar el Teorema de Ruffini podemos aplicar el Teorema del Resto. Si el divisor es $(x-1)$ debemos tomar a como 1 y por lo tanto calcular $P(1)$. Para el divisor $(x+2)$ debemos encontrar $P(-2)$.

Calcular por el teorema del resto el resto de la división:

$$P(x): Q(x)$$

$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2 \quad Q(x) = x - 3$

	1	**0**	**-3**	**0**	**2**
3		**3**	**9**	**18**	**54**
	1	**3**	**6**	**18**	$\boxed{\mathbf{56}}$

P(3) = $3^4 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 81 - 27 + 2 =$ **56**

Teorema del factor

El polinomio P(x) es divisible por un polinomio de la forma $(x \pm a)$ si y sólo sí $P(\mp a) = 0$.

Si P (a) = 0, al valor x = a se lo llama raíz o cero del polinomio P(x). Si a es raíz de un polinomio entonces $(x-a)$ es un factor de dicho polinomio.

$$P(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$P(2) = 2^2 - 5.2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

$$P(3) = 3^2 - 5.3 + 6 = 9 + 15 + 6 = 0$$

$$P(4) = 4^2 - 5.4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2$$

$x = 2;\ x = 3$ son raíces o ceros del polinomio: $P(x) = x^2 - 5x + 6$, porque $P(2) = 0$ y $P(3) = 0$. Por ello $(x-2)$ y $(x-3)$ son factores del polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

Para $x = 4$ $P(4) \neq 0$ entonces $x = 4$ no es una raíz o cero del polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. *¿La regla de Ruffini se puede aplicar para la división de dos polinomios cualesquiera?*
2. *¿Si dada la división entre polinomios y es aplicable la regla de Ruffini, entonces se puede aplicar también el teorema del resto?*
3. *Indique cuál es la condición que debe cumplirse para identificar si un valor a es raíz de un polinomio.*

Raíces de un polinomio

1. Los **ceros o raíces de un polinomio** son **divisores del término independiente** del polinomio.
2. A cada **raíz** del tipo $x = a$ le corresponde un **binomio** del tipo $(x - a)$.(Recuerde el Teorema del Factor)
3. Podemos expresar un **polinomio en factores** al escribirlo como **producto** de todos los **binomios** del tipo $(x - a)$, que se correspondan a las raíces, $x = a$, que se obtengan$P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.
4. La **suma de los exponentes de los binomios** ha de ser igual al **grado del polinomio**.
5. Todo **polinomio** que **no** tenga **término independiente** admite como raíz $x = 0$, o lo que es lo mismo, admite como **factor**x .

$$x^2 + x = x(x + 1)$$

Raíces: $x = 0$ y $x = -1$

Ejemplo:

- $P(x) = x^2 - x - 6$, sus raíces son $x = -2$; $x = 3$

$$P(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$$

$$P(3) = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$$

Entonces podemos rescribir $P(x)$ como: $P(x) = x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$.

Identidades notables

El siguiente cuadro resume algunas identidades notables que luego vamos a utilizar.

Identidades Notables	
Binomio al cuadrado	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
	$(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$
Diferencia de cuadrados	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
	$(3x+2)(3x-2) = (9x^2 - 4)$
Binomio al cubo	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
	$(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

PAUSA. Es conveniente que realicemos una pausa.

Pausa de Recapitulación

1. *¿Cuándo dos términos son semejantes?*
2. *Vuelva al Capítulo 1 transcriba las propiedades que analizamos de la potenciación.*
3. *Confeccione un cuadro con los productos notables tratados.*
4. *Transcriba las reglas para dividir dos polinomios.*
5. *¿La regla de Ruffini es útil para dividir dos polinomios cualesquiera?*
6. *Defina Teorema del resto.*
7. *Defina Teorema del factor.*
8. *¿A qué definimos como raíces de un polinomio?*
9. *Liste las identidades notables tratadas y desarrolle un ejemplo de cada una.*

Actividad de Producción

6. Dados $P(x) = 3x + 5x^2 + 3; Q(x) = -2x^2; R(x) = x^2 + x^3$, calcular las operaciones que se solicitan.

Orden	Operación	Resultado
a.	$P(x) + Q(x)$	
b.	$-Q(x) - R(x) + P(x)$	
c.	$2.P(x) + 5$	
d.	$-5.Q(x) + 3.P(x)$	
e.	$2P(x) + 3.Q(x) - 2.R(x)$	
f.	$\frac{P(x)}{Q(x)}$	
g.	$\frac{R(x)}{Q(x)}$	
h.	$5.R(x) + 2x + 3$	

i.	$-2.P(x)-3.Q(x)$	

7. Resolver los siguientes productos.

Orden	Operación	Resultado
a.	$(x+3)(x-3)$	
b.	$(2x+1)(2x-1)$	
c.	$(x+{}^{1}/_{3})(x-{}^{1}/_{3})$	
d.	$(x+5)^2$	
e.	$(2x-3)^2$	
f.	$(-5x+1)^2$	
g.	$(x+1)^3$	
h.	$(3x+5)^3$	
i.	$(-2x+{}^{1}/_{2})^3$	

8. Resolver las siguientes divisiones.

Orden	Operación	Cociente	Resto
a.	$(x^2+3x-1):(x-3)$		
b.	$(5x^3+3x^2+x):x$		
c.	$\left(3x+{}^{5}/_{3}\right):(-2)$		
d.	$(3x^4+5x^2):(x-1)$		
e.	$(2x^3-3x^2+2x-5):(3x)$		
f.	$(-5x^3+2x^2+3x+1):(x+2)$		
g.	$(x^4+3x^2-5x+4):(x-2)$		
h.	$(x^3-2x^2+3x-6)(x+3)$		
i.	$(3x^3+4x^2+12x+27):(x-2)$		
j.	$(3x^5+x^2+7):(3x^2-x)$		
k.	$(2x^6-4x^5-2x^4+x^3-x^2+1):(x^3-x^2+2)$		
l.	$(-x^6+x^5-3x^4+2x^3-x^2+x+2):(x^2-x)$		
m.	$(x^5-x^4-3x^3+6x^2-x+6):(-x^2+2x+1)$		
n.	$(3x^4-x^3-3x^2+6x-2):(2x^2-x+4)$		

9. Efectuar las siguientes divisiones aplicando Regla de Ruffini.

Orden	Operación	Cociente	Resto
a.	$(x^3-3x^2+2x-5):(x-3)$		
b.	$(x^3-2x^2+x-3):(x+{}^{1}/_{2})$		

c.	$(x^8+1):(x-1)$		
d.	$(x^4-81):(x+3)$		
e.	$(x^5+a^5):(x+a)$		
f.	$(x^5-3x^3+2x^2-15):(x+2)$		
g.	$(13x^2+4):(x-1)$		
h.	$(3x^4-2x^3+4x^2+3x-1):(x-3)$		
i.	$(x^3+5x+2):(x+{}^1\!/_2)$		

10. Encontrar el valor de a para que los siguientes polinomios sean divisibles.

Orden	Operación	Cociente	Resto	Valor de a
a.	$(2x^3-x^2+5x-a):(x+{}^1\!/_2)$			
b.	$(x^2+ax+2):(x-2)$			
c.	$(3x^6+a):(x+1)$			
d.	$(x^3+12x^2+9ax+16):(x+3)$			

11. En los siguientes ejercicios aplicar el Teorema del resto.

Orden	Operación	Resto
a.	$(x^3-3x^2+2x-5):(x-3)$	
b.	$(x^3-2x^2+x-3):(x+{}^1\!/_2)$	
c.	$(x^8+1):(x-1)$	
d.	$(x^4-81):(x+3)$	
e.	$(x^5+a^5):(x+a)$	
f.	$(x^5-3x^3+2x^2-15):(x+2)$	
g.	$(13x^2+4):(x-1)$	
h.	$(3x^4-2x^3+4x^2+3x-1)(x-3)$	
i.	$(x^3+5x+2):(x+{}^1\!/_2)$	

Estamos en condiciones de continuar.

Factorización

Factorizar es descomponer una expresión en factores que multiplicados entre si dan como producto la expresión de partida.

Por ejemplo, si multiplicamos $a$por $(a+b)$tenemos:

$a(a+b)=a^2+ab$ (Hemos aplicado la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Por lo tanto a y $(a+b)$son factores de a^2+ab.

Otros ejemplos:

- $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$, entonces $(x+2)(x+3)$ son factores de x^2+5x+6.
- A x^2-x-6 lo podemos factorizar de la siguiente forma: $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$.
- $x(x+1)=x^2+x$ entonces podemos afirmar que $x(x+1)$ son factores de x^2+x.

Factorizar un monomio

Factorizar un monomio consiste en descomponer en factores los factores de este.

Ejemplo:

- Factorizar $25a^2b$, está compuesta por 3 factores 25, a^2 y b. A 25 lo podemos descomponer en 5.5 a a^2 lo descomponemos en $a.a$ y a b no lo descomponemos porque está en su mínima expresión por lo tanto $25a^2b=5.5.a.a.b$.
- $3x^2y^2z=3.x.x.y.y.z$
- $6w^3xy^2=2.3.w.w.w.x.y.y$

Factorización de un polinomio

Para factorizar polinomios estudiaremos 6 casos a saber:

I. Factor común.
II. Factor común por grupos.
III. Trinomio cuadrado perfecto.
IV. Cuatrinomio cubo perfecto.
V. Diferencia de cuadrados.
VI. Suma y diferencia de igual exponente.

I Caso: Factor común

El primer caso de factoreo se aplica a polinomios que en todos sus términos tienen un factor común que puede ser un coeficiente o una variable.

Procedimiento:

1. Observar los coeficientes de cada término del polinomio y las variables de cada término. Si algún coeficiente o variable está contenido en cada uno de los términos entonces decimos que el coeficiente y la variable observada son factores comunes de la expresión.
2. Expresamos el polinomio dado como factor del coeficiente y variable común encontradas por el polinomio que resulta de dividir cada uno de los términos por el factor común encontrado.

Ejemplo:

- Factorizar $16x^2 + 32x - 2x^3 + 4$ como podemos observar todos los coeficientes son múltiplos de 2, y observando las variables estas no están presentes en todos los términos por lo que el factor común de esta expresión es 2, procedemos a factorear $16x^2 + 32x - 2x^3 + 4 = 2(8x^2 + 16x - x^3 + 2)$.
- Factorizar $6x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 12x$, observando los coeficientes podemos ver que todos son múltiplos de 3 y observando las variables todos los términos tienen en común x, factorizamos $6x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 12x = 3x(2x^3 + x^2 + 2x + 4)$.
- $3x^2y^3 + 7x^3y^2 + 11x^7y$, no observamos factor común entre los coeficientes y entre las variables se observa que todos los términos presentan a las variables x e y, por lo tanto, son factor común y las elegimos en su menor exponente por lo que $3x^2y^3 + 7x^3y^2 + 11x^7y \rightarrow x^2y(3y^2 + 7xy + 11x^5)$.

II Caso: Factor común en grupos

Para poder aplicar el 2º caso de factoreo debemos observar que el polinomio tenga al menos 4 términos y que la cantidad de términos de la expresión sea par. Identifico primero los términos que tiene factores comunes y agrupo de tal manera de establecer grupos de igual número de términos. Se factorean dichos grupos y luego se aplica de nuevo el primer caso de factoreo.

Procedimiento:

1-Separamos el polinomio agrupando en partes que contengan igual cantidad de términos y en los cuales he identificado los factores comunes.

2- Extraemos el factor común de cada una de las partes.

3- Elegimos factor común la expresión que nos queda entre paréntesis de cada una de las partes (todas las expresiones deben coincidir en caso contrario revisar la aplicación del caso).

Ejemplo:

- Factorizar $25xy - 10x^3 + 15y - 6x^2$, los dos primeros términos $25xy - 10x^3$ tienen como factor común $5x$y los dos segundos términos tienen como factor común 3por lo tanto nos queda $5x(5y - 2x^2) + 3(5y - 2x^2)$, ahora si elegimos el factor entre paréntesis podemos aplicar el primer caso y nos queda $(5y - 2x^2)(5x + 3)$.
- $2mx + 2my + 6m + nx + ny + 3n$, podemos separar los términos $2mx + 2my + 6m$ que tienen como factor $2m$ y los restantes $nx + ny + 3n$ que tienen como factor común n. Así obtenemos $2m(x + y + 3) + n(x + y + 3)$. Aplicando el 1º caso queda $(x + y + 3)(2m + n)$.
- $10am^2xz - 15bm^2xz + 10ax - 15bx - 8am^2yz + 12bm^2yz - 8ay + 12by$. Este polinomio tiene más de 4 términos y no puedo aplicar el 1º caso de factoreo. Observamos y vamos a agrupar de tal manera que podamos reunir la mayor cantidad de factores comunes. Obtenemos $5m^2xz(2a - 3b) + 5x(2a - 3b) - 4m^2yz(2a - 3b) - 4y(2a - 3b)$. Al aplicar el 1º caso obtenemos $(2a - 3b)(5m^2xz + 5x - 4m^2yz - 4y)$. Si observamos el 2º factor de la expresión podemos ver que existen factores comunes por grupos por lo que debemos factorizar y nos queda $(5am^2xz + 5x - 4m^2yz - 4y) \rightarrow 5x(m^2z + 1) - 4y(m^2z + 1) \rightarrow (m^2z + 1)(5x - 4y)$. Al remplazar el último polinomio en la expresión anterior obtenemos: $(2a - 3b)(m^2z + 1)(5x - 4y)$

III Caso: Trinomio cuadrado perfecto

Este caso se puede aplicar cuando el polinomio a factorizar tiene 3 términos y que sea equivalente a un binomio elevado al cuadrado, así podremos escribir el trinomio como un binomio al cuadrado. Recordemos la fórmula del binomio al cuadrado $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Procedimiento:

1- Observar la que el polinomio solo tenga 3 términos.

2- Reconocer los cuadrados perfectos, estos términos no pueden tener un signo negativo adelante, recordemos que las bases las podemos obtener al aplicar la $\sqrt{a^2}$y a $\sqrt{b^2}$, hasta aquí hemos obtenido las posibles bases del trinomio.
3- Obtener el doble producto de las bases correspondientes y observar si el término obtenido se encuentra presente en el polinomio.
4- Factorizamos como el cuadrado del binomio de las bases encontradas.

Tener en cuenta:

- Si el doble producto que figura en el *trinomio dado* es positivo, entonces las bases del Cuadrado del Binomio tendrán las dos el mismo signo.
- Si el doble producto que figura en Trinomio *dado* es negativo, entonces las bases del Cuadrado del Binomio tendrán signos opuestos.

Ejemplo:

- Factorizar $x^2 + 10x + 25$. Como podemos observar las bases al cuadrado pueden ser x y 5, por lo que debemos averiguar si el doble producto de las bases está en el polinomio, en nuestro caso el doble producto de las bases es $10x$ y está presente en el polinomio dado por lo que podemos factorizar de la siguiente forma $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.
- $4x^2 + 12xz + 9z^2$, nuestras bases en este caso son $2x$ y $3z$, al hacer el doble producto obtenemos $12xz$ que está presente en el polinomio por lo tanto factorizamos $4x^2 + 12xz + 9z^2 = (2x + 3z)^2$.
- $x^2 - 2xy^2 + y^4$, en este caso las bases son x e y^2y el doble producto de las bases es $2xy^2$ pero como observamos está, pero con signo negativo por lo tanto $x^2 - 2xy^2 + y^4 = (x - y^2)^2$.

IV Caso: Cuatrinomio cubo perfecto

Para aplicar este caso debeos asegurar que sea un polinomio de 4 términos equivalente a un cubo de un binomio. Recordemos que el cubo de un binomio es $\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$***.***

Procedimiento:

1- Observar que el polinomio dado tenga 4 términos.

2- Reconocer los cubos perfectos, recordemos que podemos aplicar $\sqrt[3]{a^3}$ y $\sqrt[3]{b^3}$para encontrar las bases.
3- Encontrar el triplo de una base al cuadrado por la segunda base y el triplo de una base por la segunda base al cuadrado. Si estos términos se encuentran en el polinomio, entonces podemos continuar, caso contrario no se puede aplicar este caso de factoreo al polinomio dado.
4- Factorizamos al polinomio dado como cubo de un binomio.

Tener en cuenta:

- Si los dos términos correspondientes a los triples productos son positivos, entonces las bases del cubo del trinomio serán de signo positivo.
- Si los dos términos correspondientes a los triples productos tienen signos opuestos, entonces las bases del trinomio del binomio tendrán signos opuestos.

Ejemplo:

- Factorizar $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$, las bases pueden ser $2x$y 3. Entonces el primer triplo debe ser $3.(2x)^2.3 = 36x^2$ y el segundo triplo debe ser $3.(2x)(3)^2 = 54x$, como ambos términos están presentes en el polinomio dado podemos decir que $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x + 3)^3$
- $x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$, las bases pueden ser x^2 y -4, por lo tanto, el segundo término del Cuatrinomio debe ser $3(x^2)^2(-4) = -12x^4$ el tercer término debe ser $3(x^2)(-4)^2 = 48x^2$como están presentes podemos decir que $x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64 = (x^2 - 4)^3$.
- $-66+13153\frac{1}{8}n^3 - \frac{3}{2}n^2m + 6nm^2 - 8m^3$, las bases pueden ser $\sqrt[3]{\frac{1}{8}n^3} = \frac{1}{2}n$ y $\sqrt[3]{-8m^3} = -2m$, el segundo término $3\left(\frac{1}{2}n\right)^2(-2m) = \frac{-6}{4}n^2m = -\frac{3}{2}n^2m$, el tercer término debe ser $3\left(\frac{1}{8}n\right)(-2m)^2 = 6m^2$como están presentes estor términos podemos escribir que $\frac{1}{8}n^3 - \frac{3}{2}n^2m + 6nm^2 - 8m^3 = \left(\frac{1}{2}n - 2m\right)^3$.

V Caso: Diferencia de cuadrados

Para reconocer el 5º caso el polinomio solo debe tener 2 términos, cada uno de los términos deben ser cuadrados de alguna base y el signo que relaciona las bases debe ser negativo. El 5º caso se basa en el producto notable $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$

Procedimiento:

1. Observar que el polinomio dado posea 2 términos con signos opuestos.
2. Determinar las bases correspondientes a los cuadrados perfectos. Recordemos que aplicando $\sqrt{a^2} = a$ obtenemos la primera base y $\sqrt{b^2} = b$ podemos encontrar la segunda base.
3. Si podemos encontrar las bases de cuadrados perfectos, entonces expresamos las mismas.

Ejemplo:

- Factorizar $4a^4 - 16b^6$, nuestras bases pueden ser $\sqrt{4a^4} = 2a^2$ y $\sqrt{16b^6} = 4b^3$ por lo tanto $4a^4 - 16b^6 = (2a^2 - 4b^3)(2a^2 + 4b^3)$.
- $x^4 - 16$, es este caso las bases son x^2 y 4, por lo tanto $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$.
- $9x^6 - 1$, las bases son $\sqrt{9x^6} = 3x^3$ y $\sqrt{1} = 1$, entonces $9x^6 - 1 = (3x^3 - 1)(3x^3 + 1)$.

VI Caso: Suma o resta de potencias de igual exponente.

Este caso de factoreo se puede aplicar para polinomios de dos términos cuyos términos estén elevados a una misma potencia. Es decir, este caso se aplica para polinomios de la forma $\boldsymbol{P(x) = x^k \pm n^k}$.

Para este caso vamos a utilizar para factorear la Regla de Ruffini, debiendo encontrar el binomio de la forma $(x \pm a)$ para poder aplicarla. Para poder encontrar el binomio $(x \pm a)$ vamos a tener en cuenta el siguiente esquema:

$$\text{Cuando K es un número impar}$$

$$\begin{cases} -\text{ si el signo es } (-) \text{ dividimos el polinomio por } (x-b) \\ -\text{ si el signo es } (+) \text{ dividios por el polinomio } (x+b) \end{cases}$$

$$\text{Cuando K es un número par}$$

$$\begin{cases} -\text{ si el signo es } (-) \text{ dividimos el polinomio por } (x-b) \text{ ó } (x+b) \\ -\text{ si el signo es } (+) \text{ No podemos factorizar el polinomio} \end{cases}$$

Ejemplo:

- Factorizar $x^5 + 2^5$, como el exponente es impar y el signo que une los términos es positivo entonces debemos aplicar la Regla de Ruffini dividiendo al polinomio dado por $(x + 2)$

	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**32**
-2		**-2**	**4**	**-8**	**16**	**-32**
	1	**-2**	**4**	**-8**	**16**	**0**

Por lo tanto, podemos factorizar $x^5 + 2^5 = (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)(x + 2)$

- $x^3 - 2^3$, como el exponente es impar y el signo es negativo entonces debemos aplicar la regla de Ruffini dividiendo al polinomio por $(x - 2)$

	1	**0**	**0**	**-8**
2		**2**	**4**	**8**
	1	**2**	**4**	**0**

Entonces $x^3 - 2^3 = (x^2 + 2x + 4)(x - 2)$.

- $x^6 + 7^6$, en este caso los exponentes son pares y el signo es positivo por lo tanto no podemos factorizar el polinomio.

Realicemos una pausa.

PAUSA.

Pausa de Recapitulación

1. Confeccione un cuadro donde indique la cantidad de términos que deben ser tenidas en cuenta para la aplicación de cada caso de factoreo.

Introducción a Expresiones Algebraicas Racionales

Una expresión algebraica racional es aquella de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios y $Q(x)$ distinto del polinomio nulo.

Ejemplo:

- Ejemplo de expresiones algebraicas racionales: $\frac{8}{x-1}; \frac{x^2-4}{x-2}; \frac{x^2-1}{4x^5}$
- No son ecuaciones irracionales: $\frac{x-1}{8}; \frac{x^2-1}{\frac{1}{4}}; 3x - 5\cos x; \sqrt{x+1}$

Simplificación de Expresiones Algebraicas Racionales

Simplificar una expresión racional consiste en utilizar la regla de cancelación, de ser posible, para eliminar todos los factores comunes del numerador y el denominador.

Ejemplo:

$\frac{(x-4)(x+3)}{(x+2)(x-4)} = \frac{\boxed{(x-4)}(x+3)}{(x+2)\boxed{(x-4)}} = \frac{x+3}{x+2}$ Factor común en este ejemplo es $x-4$.

- Para poder identificar los factores comunes el numerador y el denominador deben estar factorizados.

$$\frac{x^2-3x-10}{x^2+5x+6} = \frac{\boxed{(x+2)}(x-5)}{(x+3)\boxed{(x+2)}} = \frac{x-5}{x+3}$$

Solo se puede eliminar un factor del numerador con uno del denominador.

1. *Factorizar completamente el numerador y el denominador.*
2. *Cancelar $(x+2)$ ya que este es el factor común.*

- (Se simplifica un polinomio que está elevado al cuadrado)

$$\frac{x^2-6x+9}{5x-15} =$$

$$\frac{(x-3)^2}{5(x-3)} =$$

$$\frac{(x-3)^{\boxed{2}}}{5\boxed{(x-3)}} =$$

$$\boldsymbol{\frac{(x-3)}{5}}$$

En este caso hemos aplicado el 3° caso de factoreo para reducir un polinomio al cuadrado y en el denominador el 1° caso de factoreo. Esto nos ha permitido simplificar uno de los factores del numerador con uno del denominador.

- $\frac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3} = \frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x-3}{x+1}$

Actividad de Producción

12. Factorear utilizando el primer caso de factoreo.

Orden	Operación	Factores

a.	$15a^2b^3 + 5a^2b^2 - 25a^4b^3 + 10a^5b^5y$	
b.	$4x^2 + 16x^7 - 28x^5$	
c.	$18a^2b + 9/2\ abc - 27ab^4$	
d.	$7/3a^6b^3c + 7a^5xb^2 + 14/5\ a^2x^3bc$	
e.	$0{,}16a^2b^2 + 2/5\ a^4b^3 - 0{,}32a^5b^5$	
f.	$1/2x^2y^2 + 3/2\ x^4y^4 - 1/2\ x^6y^6$	

13. Factorear utilizando el segundo caso de factoreo.

Orden	Operación	Factores
a.	$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b$	
b.	$15a^2 - 3am - 3/2a - 5ax + xm + 1/2x$	
c.	$9a^2x - 3ax^2 + 15a - 5x + 6am - 2mx$	
d.	$6b^6 - 2b^5x^2 + 2/3b^4x^3 - 5/3x^7 + 5bx^6 - 15b^2x^4$	
e.	$16amx - 8amy + 2x - y$	
f.	$am - an + ax - bn + bm + bx - cm - cx + cn$	

14. Factorear utilizando el tercer caso de factoreo.

Orden	Operación	Factores
a.	$(x + 2)^2$	
b.	$(a + b)^2$	
c.	$(1/2\ x^3 + 3m^2n)^2$	
d.	$(4 - x)^2$	
e.	$(r/2 - s)^2$	
f.	$(1/3a^2n^3 - 0{,}64\ m^2)^2$	

15. Factorear utilizando el cuarto caso de factoreo.

Orden	Operación	Factores
a.	$(x + y)^3$	
b.	$(2a - 3b)^3$	
c.	$(m^3 + 2n)^3$	
d.	$(p + h^4)^3$	
e.	$(x/3 - a)^3$	
f.	$(1/2m^2x - 5)^3$	

16. Factorear utilizando el quinto caso de factoreo.

Orden	Operación	Factores
a.	$9b^6 - 25a^2$	
b.	$1/4b^8a^2 - 1/81\ x^2n^6$	
c.	$144 - 49m^6$	
d.	$100\ b^6 - 9/49\ x^4$	
e.	$1/36\ a^2x^6 - 16\ m^2$	
f.	$4/49\ b^8 - 121\ x^6$	

17. Factorear utilizando el sexto caso de factoreo.

Orden	Operación	Factores
a.	$x^5 + a^5$	
b.	$1 + a^7$	
c.	$27 + x^3$	
d.	$a^5 - 32x^5$	
e.	$x^4 - 1/16a^4b^4$	
f.	$a^4 - b^4c^4$	

18. Factorear.

Orden	Operación	Factores
a.	$3ax^2 + ax$	
b.	$x^2 + ax - bx - ab$	
c.	$- z^3 - z^2$	
d.	$y^2 - az + bz - ab$	
e.	$ay - a^2y^2$	
f.	$1/4x^2 - x^4$	
g.	$- 2y^2 + 4y - 2$	
h.	$a^3 - m^3$	
i.	$- y^4 + 81$	
j.	$(x - y)^2 - y$	
k.	$a^2 - 8a + 15$	
l.	$y^2 + 7y + 12$	
m.	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	
n.	$- 3y^2 - 1 + 3y + y^3$	
o.	$b^4 + 16b^2 + 64$	
p.	$(a - 1)^2 - 1$	
q.	$- x^2 + b^2$	
r.	$y^4 - 3y^2 + 2$	

19. Combinar sucesivamente casos de factoreo.

Orden	Expresión	Resultado
a.	$12x^2 - 3$	
b.	$5z^3m^4 - 80z^3$	
c.	$x^6 - 1$	
d.	$x^3y^2 - 4x^3 - y^2 + 4$	
e.	$4a^4 + 6a^3b + 3a^2b^2$	
f.	$\frac{3}{8}a^3x - \frac{9}{4}a^2x + \frac{9}{2}ax - 3x$	
g.	$2x^7y - 12x^5y^2 + 24x^3y^3 - 16xy^4$	
h.	$a^3m^2 - m^2 + a^3n - n$	
i.	$3a^3b^4 - 6a^3b^2 + 3a^3 + 24b^4 - 48b^2 + 24$	
j.	$3x^2 + 3x + \frac{3}{4}$	
k.	$5a^2b^4 + 125b^6x^8 - 50ab^5x^4$	
l.	$x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$	
m.	$a^3 - a^2 - a + 1$	
n.	$a^2m - b^2m - a^2n + b^2n$	
o.	$5m^3 + 5m$	

20. Simplificar empleando casos de factoreo.

Orden	Expresión	Resultado
a.	$\frac{2a^2}{4a^2 - 4ab}$	
b.	$\frac{4x^2y^3}{24x^3y^3 - 36x^3y^4}$	
c.		
d.	$\frac{8a^8 - 27}{4a^2 + 12a + 9}$	
e.	$\frac{a^3 - 25a}{2a^3 + 12a + 9}$	
f.	$\frac{2xy - 2x + 3 - 3y}{18x^3 + 15x^2 - 63x}$	
g.	$\frac{3x^2 - 12x - x^2y + 4y}{x^4 - 5x^3 - 14x^2}$	
h.	$\frac{(a^2 - 1)(a^2 + 2a - 3)}{(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 4a + 3)}$	
i.	$\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^4 + x^3 - 2x^2 + 9x - 9}$	
j.	$\frac{a^2 - a - 20}{a^2 - 7a + 10}$	
k.	$\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$	

l.	$\frac{(x^6 - y^6)(x + y)}{(x^3 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)}$	
m.	$\frac{m - am + n - an}{1 - 3a + 3a^2 - a^3}$	
n.	$\frac{(x - 4y)^2}{x^5 - 64x^2y^3}$	
o.	$\frac{10a^2(a^3 + b^3)}{6a^4 - 6a^3b + 6a^2b^2}$	

21. Simplificar.

Orden	Expresión	Resultado
a.	$\frac{x^2-4}{3x-6}$	
b.	$\frac{x^2-9}{x+3}$	
c.	$\frac{x-4}{x^2-16}$	
d.	$\frac{x^2-6x+9}{5x-15}$	
e.	$\frac{6x-18}{8x+16}$	
f.	$\frac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x}{\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}}$	
g.	$\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+4x^2+4x}$	
h.	$\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}$	

Llegamos al final.

Bibliografía

[1] Stewart, James, CÁLCULO DE UNA VARIABLE, sexta edición Cengage Learning – Edición 2008.
[2] Sullivan, Michael, PRECALCULO. Prentice Hal. Edición 2006.
[3] Anton, Howard, INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL, Limusa. Edición 2016.

Autoevaluación

1) Dados $P(x^4 - 3x^2 + 5x - 3)$, $Q(x) = x^2 - 7x + 5$, $R(x) = x - 2$¿Cuál de las siguientes afirmaciones es válida?

A) $P(x) - Q(x) = x^4 - 2x^2 - 2x + 2$	B) $P(x) + Q(x) = x^4 - 2x^2 - 2x + 2$	C) $P(x).Q(x) = x^4 - 2x^2 - 2x + 2$

2) Dados $P(x^4 - 3x^2 + 5x - 3)$, $Q(x) = x^2 - 7x + 5$, $R(x) = x - 2$¿Cuál de las siguientes afirmaciones es válida?

A) $P(x) - Q(x) = x^4 - 2x^2 - 2x + 2$	B) $Q(x) - P(x) = -x^4 + 4x^2 - 12x + 8$	C) $Q(x).P(x) = x^4 - 2x^2 - 2x + 2$

3) Dados $P(x^4 - 3x^2 + 5x - 3)$, $Q(x) = x^2 - 7x + 5$, $R(x) = x - 2$¿Cuál de las siguientes afirmaciones es válida?

A) $P(x): Q(x) = x^4 - 2x^2 - 2x + 2$	B) $Q(x): P(x) = 4x^2 - 12x + 8$	C) $Q(x): R(x) = x - 5$

4) Dados $P(x^4 - 3x^2 + 5x - 3)$, $Q(x) = x^2 - 7x + 5$, $R(x) = x - 2$¿Cuál de las siguientes afirmaciones es válida?

A) $P(x): R(x) = x^3 + 2x^2 + x + 7$	B) $P(x): Q(x) = 4x^2 - 12x + 8$	C) $R(x): Q(x) = x - 5$

5) El resto de dividir $P(x)$ en $R(x)$ es

A) 11	B) -11	C) 5

6) El cociente de dividir $P(x)$ en $Q(x)$ es:

A) $x^2 + 7x + 41$	B) $x + 5$	C) $-x^2 - 7x - 41$

7) El resto de dividir $P(x)$ en $Q(x)$ es:

A) $257x - 208$	B) $-257x + 208$	C) $x - 5$

8) El resto de dividir $Q(x)$ en $R(x)$ es:

A) $x^2 + 7x + 41$	B) 5	C) -5

9) La expresión factorizada de $x^2 - 36$, es:

A) $(x+9)(x-9)$	B) $x-6^2$	C) $(x-6)(x+6)$

10) La expresión factorizada de x^2+9, es:

A) $(x+3)(x-3)$	B) $(x+3)^2$	C) **No se puede factorizar**

11) La expresión factorizada de x^5-32, es:

A) $(x-5)(x+5)$	B) $(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$	C) **No se puede factorizar**

12) La expresión factorizada de $x^2+8x+16$, es:

A) $(x+4)^2$	B) $(x-4)^2$	C) (x^2+4^2)

13) La expresión factorizada de $x^2-10x+25$, es:

A) $(x+5)^2$	B) $(x-5)^2$	C) (x^2+5^2)

14) La expresión factorizada de $x^3-12x^3+8x^2-8$, es:

A) **No se puede factorizar por el 4° caso**	B) $(x-2)^3$	C) $(x+2)^3$

15) La expresión factorizada de $4a+4b+xa+xb$, es:

A) **No se puede factorizar por el 2° caso**	B) $(a+b)(4+x)$	C) $(4+x)(a-b)$

2025

Guía de Aprendizaje de ECUACIONES

Lic. Esp. Fernando Javier Quiroga Villegas

Guía de Aprendizaje de Ecuaciones

EDICIÓN DIGITAL

Villa Mercedes - San Luis, Republica Argentina, Diciembre 2024.

Guía de Aprendizaje de Ecuaciones

EDICIÓN DIGITAL

Lic. Esp. Fernando Javier Quiroga Villegas

Fernando Javier Quiroga Villegas, docente efectivo de la Universidad Nacional de San Luis de la asignatura Matemática para las carreras de Técnico Universitario en Mantenimiento Industrial, Licenciatura en Bromatología de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias y de Técnico Universitario en Gestión Financiera de la Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales de la Universidad Nacional de San Luis.

Contenido

Introducción

En el Capítulo 1 hemos abordado el tema Números Reales, en el 2 Expresiones Algebraicas y en este capítulo nos introducimos en el mundo de las Ecuaciones.
¿Cómo comenzamos este nuevo capítulo? Comenzamos este nuevo capítulo de una manera distinta. Te proponemos revises algunos de los contenidos del capítulo anterior, ellos son:

- Expresiones Algebraicas
- Términos Algebraicos
- Términos semejantes
- Monomios y polinomios
- Partes de un monomio
- Polinomio
- Polinomio de una variable real

Además de revisar conceptos, nos introducimos en los temas a tratar en este nuevo capítulo en el cual te proponemos desarrollar Ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas.

Comencemos:

Igualdad y Ecuaciones

Varias expresiones numéricas o algebraicas relacionadas entre sí con el signo igual (=) le llamaremos igualdad.

Algunas igualdades podrían ser:

- 96 - 4 = 13
- $7.10^3 = 7000$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $x + \frac{x}{7} = 24$

Estas igualdades no tienen el mismo carácter. Para empezar, las igualdades pueden ser **ciertas** o **falsas**: la igualdad numérica a*)* es *falsa*, pero la b*)* es *cierta*. La igualdad algebraica *c)* es cierta para cualquier valor de a y b; sin embargo, la igualdad *d)* es *cierta* (decimos que *se verifica*) para *x* = 21 y para cualquier otro valor de *x* es *falsa*. Por tanto, hay igualdades de dos tipos:

Son identidades aquellas expresiones que se verifican siempre, tanto si son numéricas o algebraicas.

Situación 1

3-2-1=0es una identidad numérica.

Situación 2

$(a-b).(a+b)=a^2-b^2$ es una identidad algebraica.

Ahora estamos en condiciones de definir Ecuaciones Algebraicas:

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se satisface para determinados valores de sus variables llamadas incógnitas. El valor de la incógnita que verifica la ecuación se llama solución o raíz de la ecuación.

Situación 1

La ecuación $\frac{4}{x-1} = 2x$ es una ecuación que se verifica para $x = 2$ y $x = -1$.

Situación 2

La ecuación:$y - x = 1$se verifica para una infinidad de parejas de números:$y = 3$, $x = 2$; $y = 4$, $x = 3$; $y = 10$, $x = 9$; etc.

Situación 3

Si $x + 1 = 2$

Analicemos cómo se comporta esa igualdad si reemplazamos a x por 0, $0+1=2 \rightarrow 1 \neq 2$, entonces estamos frente a una ecuación porque no se verifica la igualdad para cualquier valor que tome la variable.

Si reemplazamos a x por 1, $1+1=2$, entonces la igualdad se verifica para $x=1$, por ello podemos afirmar que esta igualdad nos es una identidad es una ecuación.

Situación 4

En $x+7=10$

No se verifica para cualquier valor de x, solo se verifica cuando $x=3$, por lo tanto, es una ecuación.

Situación 5

$x^2-x-6=0$. es una ecuación que solo se verifica para $x=-2$ y $x=3$.

Partes de una ecuación

En una ecuación podemos distinguir:

Miembros: son cada una de las expresiones que aparecen a los lados del signo igual.

Términos: son los sumandos que forman los miembros.

$$\overbrace{\underline{2x}+\underline{3}}^{1^{\circ}\text{ miembro}} = \overbrace{\underline{3x}+\underline{2}}^{2^{\circ}\text{ miembro}}$$

$$\text{Términos}$$

Las incógnitas son las variables que aparecen en la ecuación.

Las soluciones son los valores que pueden tomar las variables para que la igualdad sea verdadera.

Situación 1

En $x+7=11$

Primer miembro: $x+7$

Segundo miembro: 11

Términos: $x, 7, 11$

Incógnita: variable x

Solución: $x=4$

Situación 2

$$x^2-x-6=0$$

Primer miembro: x^2-x-6

Segundo miembro: 0

Términos: $x^2, -x, -6, 0$

Incógnita: variable x

Solución: $x=-2; x=3$.

Forma general de una ecuación de grado n

La forma general de una ecuación algebraica de grado n, en donde n es natural es:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

donde:

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son los coeficientes (números reales),

Si $a_0 \neq 0$; el grado de la ecuación es n, y a_0 es el coeficiente principal,

a_n es el término independiente.

Situación 1

$$5x^3 - 2x^2 + 3 = 0$$

Es una ecuación de grado 3.
Coeficiente principal 5.
Término independiente 3.

Situación 2

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

Es una ecuación de grado 2.
Coeficiente principal 1.
Término independiente -1.

Situación 3

$$x^4 - 5x = 0$$

Es una ecuación de grado 4.
Coeficiente principal 1.
Término independiente 0.

Tipos de ecuaciones según su grado

Según su grado las ecuaciones pueden ser:

De primer grado o lineales: Son las ecuaciones que tienen por forma general $ax + b = 0$ con $a_0 \neq 0$.

De segundo grado o cuadráticas: Son las ecuaciones que tienen por forma general $ax^2 + bx + c$ con $a_0 \neq 0$.

De tercer grado o cúbicas: Son las ecuaciones que tienen por forma general $ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a_0 \neq 0$.

De grado n: Son las ecuaciones que tienen por forma general $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ con $a_0 \neq 0$.

Situación 1

- Son ecuaciones de primer grado:

$$3x + 1 = 2$$
$$5x = x + 1$$
$$x - 3x + 1 = 7$$

Situación 2

- Son ecuaciones de segundo grado:

$$x^2 = 4$$
$$3x^2 + 3 = 3$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

Situación 3

- Son ecuaciones de tercer grado:

$$y^3 + 2y^2 + y = 1$$
$$x^3 + 1 = 10$$
$$3x^3 + 2x^2 + x + 5 = 0$$

Situación 4

- Son ecuaciones de cuarto grado:

$$x^4 + 3 = 6$$
$$z^4 + z^3 - z = 60$$
$$x^4 = 16$$

Reglas para tener en cuenta para resolver ecuaciones

Para resolver una ecuación debemos tener en cuenta las siguientes reglas:

Regla 1: Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales los resultados serán iguales.

Regla 2: Cualquier término se puede pasar a otro miembro, pero este pasa con el signo opuesto, es decir: un término sumando pasa restando y un término multiplicando pasa dividiendo y viceversa.

Regla 3: Términos iguales con signos iguales en distintos miembros pueden simplificarse.

Regla 4: Los signos de todos los términos de una ecuación pueden cambiarse sin que la ecuación sea alterada.

Situación 1

- Sea la ecuación $5x + 1 = 0$,
  Si restamos a ambos miembros -1, no se altera la igualdad
  $5x + 1 - 1 = 0 - 1$ y tenemos que $5x = -1$.
  Si multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{5}$, no se altera la igualdad, y obtenemos $\frac{1}{5}5x = -1\frac{1}{5}$, simplificando queda $x = -\frac{1}{5}$, con lo que obtuvimos el valor que verifica la ecuación.

Todas estas reglas nos serán de utilidad para resolver ecuaciones.

PAUSA. Es conveniente que realicemos una pausa.

Pausa de Recapitulación

1. ¿A qué llamamos igualdad?
2. ¿Cuáles son los tipos de igualdades?
3. Defina Ecuación Algebraica.
4. ¿Cómo se llama al valor que verifica una ecuación?
5. ¿Cuáles son las partes de una ecuación?
6. ¿Cuál es la forma general de una ecuación de grado n?
7. Proponga un cuadro que sintetice los tipos de ecuaciones según su grado.
8. ¿Cuáles son las reglas para tener en cuenta para resolver ecuaciones?

Actividades Obligatorias

1. Dadas las siguientes igualdades indicar cuales corresponden a identidades y cuales a ecuaciones.

Orden	Igualdad	Identidad	Ecuación
a.	$-x^2 - 4x + 12 = 0$		
b.	$x = 2$		
c.	$5 = 4 + 1$		
d.	$3x = 2x - x$		
e.	$x - 12x + 5 = 3 - 11x + 2$		
f.	$5 = 4x + 2$		
g.	$6 = x$		
h.	$7x + 1 = 3 + 8x - x - 2$		
i.	$y = 4x + 1$		

2. Completar el cuadro.

Orden	Ecuación	Grado	Coeficiente Principal	Término Independiente
a.	$3x + 1 = 0$			
b.	$-5x^2 = 0$			
c.	$x^3 - x - 6 = 0$			
d.	$x^4 - 2x + 6 = 0$			
e.	$x^5 - 7x^4 = 0$			
f.	$6x^3 + 2x^2 - 3x + 7 = 0$			
g.	$-9x^9 = 0$			

h.	$-x^2+9x-4=0$			
i.	$x^{100}-x^{99}+99=0$			

Seguramente no tiene dificultades al revisar y realizar estas actividades. Entonces siga.

Continuamos con los siguientes temas…

Ecuaciones de primer grado con una variable

Una ecuación de primer grado puede expresarse de la forma $ax+b=0$, donde $a\neq 0$ y su solución está dada por $x=\frac{-b}{a}$.

Situación 1

- $-2x+3=0$, la podemos resolver aplicando definición, y su solución está dada por $x=\frac{3}{2}$

Situación 2

- $x=\frac{3}{6}$ es la solución de $6x-3=0$.

Situación 3

- Encontrar el valor de x para $x+5=0$ es $x=-5$.

Para resolver operaciones combinadas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita debemos tener en cuenta las siguientes reglas:

1. Se suprimen primero los signos de agrupación (llaves, corchetes y paréntesis).

2. Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.

3. Se hace pasaje de términos, reuniendo en un solo miembro todos los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocidas.

4. Se reducen términos semejantes en cada miembro.

5. Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Situación 1

- Resolver la ecuación $7x+1=x+5+3-1$
  Aplico regla 2: $7x+1=x+7$
  Aplico regla 3: $7x-x=7-1$
  Aplico regla 4: $6x=6$
  Aplico regla 5: $\frac{6}{6}x=\frac{6}{6}\rightarrow x=1$

Situación 2

- Resolver $3x-(2x-1)=7x-(3-5x)+(-x+24)$
  Aplico regla 1: $3x-2x+1=7x-3+5x-x+24$
  Aplico regla 2: $x+1=11x+21$
  Aplico regla 3: $x-11x=21-1$
  Aplico regla 4: $-10x=20$
  Aplico regla 5: $\frac{-10}{-10}x=\frac{20}{-10}\rightarrow x=-2$

Situación 3

- Resolver $-8x=3$
  Aplico regla 5: $\frac{-8}{-8}x=\frac{3}{-8}\rightarrow x=-\frac{3}{8}$

Ecuaciones que carecen de solución

Intentemos resolver las siguientes ecuaciones:

- $x - 3 = 2 + x$
- $\frac{x}{2} = 1 - x + \frac{3x}{2}$

Situación 1

$$x - 3 = 2 + x$$
$$x - x = 2 + 3$$
$$0 = 5$$

Situación 2

$$\frac{x}{2} = 1 - x + \frac{3x}{2}$$
$$\frac{x}{2} + x - \frac{3x}{2} = 1$$
$$\frac{x + 2x - 3x}{2} = 1$$
$$\frac{0}{2} = 1$$
$$0 = 2$$

En el primer caso obtenemos la expresión $0 = 5$ y en el segundo $0 = 2$. Estas ecuaciones no son verdaderas independientemente del valor que toma la variable x. Por ello diremos que en estos casos la ecuación no tiene solución.
Si en ambas ecuaciones conseguimos que el segundo miembro sea 0 y simplificamos todo lo posible, obtenemos: -5 = 0 y -2 = 0. Se observa que "desaparece" la variable x, y por ello, no podemos obtener algún valor que verifique la ecuación.

Ecuaciones con infinitas soluciones

Intentemos resolver las siguientes ecuaciones:

- $2x - 1 = 3x + 3 - x - 4$
- $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$

Situación 1

$$2x - 1 = 3x + 3 - x - 4$$
$$2x - 3x + x = 3 - 4 + 1$$
$$0x = 0$$
$$0 = 0$$

Situación 2

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$$
$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{6} = 0$$
$$\frac{3x - 2x - x}{6} = 0$$
$$\frac{0}{6} = 0$$
$$0 = 0$$

En ambos casos cuando intentamos resolver las ecuaciones obtenemos la expresión 0 = 0.

La igualdad que se obtiene es cierta y podemos observar que la variable se elimina.
Si sustituimos por cualquier valor a la variable podemos comprobar que la ecuación se cumple.
En estos casos concluiremos que la ecuación tiene infinitas soluciones que la verifican.

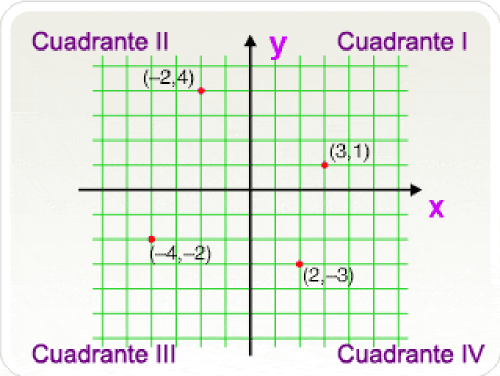
Sistema rectangular de coordenadas cartesianas

Dos rectas que se cortan constituyen un sistema de ejes coordenados. Si las rectas son perpendiculares (entre ellas forman un ángulo de 90º) entre sí, tenemos un sistema de ejes coordenados rectangulares; si no lo son tenemos un sistema de ejes oblicuos.

A una de las rectas la horizontal se la denomina eje de las abscisas o eje x y a la recta vertical se la denomina eje de las ordenadas o eje y.

Al punto de intersección de ambos ejes se lo denomina origen.

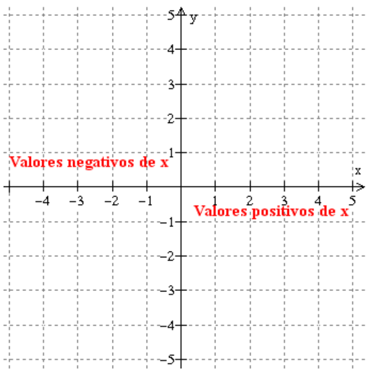
Los ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas cuadrantes.

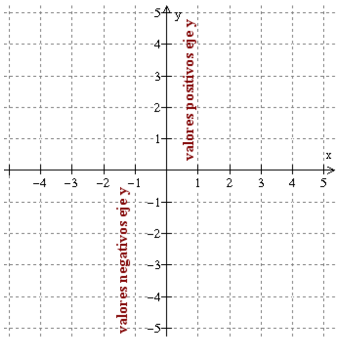


Signo de las coordenadas

El eje de las x o eje de las abscisas se divide en dos partes a la derecha del origen se toman los valores positivos y a la izquierda del origen los valores negativos.

El eje de las y o eje de las ordenadas se divide en dos partes hacia arriba del origen se toman los valores positivos y a hacia abajo del origen los valores negativos.





Determinación de un punto por sus coordenadas

Las coordenadas de un punto determinan el punto y se denota $P(x, y)$.

Conociendo las coordenadas de un punto se puede fijar el punto en el plano, la primera coordenada corresponde al eje de las abscisas y la segunda coordenada corresponde al eje de las ordenadas, se ubican de acuerdo si el signo es positivo o negativo.

Situación 1

- Para representar el punto (4, 2) es el punto que se encuentra alejado 4 unidades del eje x en la dirección positiva del eje x y a 2 unidades del eje y en la dirección positiva del eje y. Este punto al tener sus dos coordenadas positivas corresponde al primer cuadrante.

Situación 2

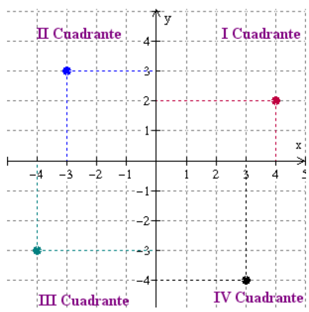
- Representar el punto (-3,3), nos posicionamos en el origen y nos alejamos 3 unidades del eje x en la dirección negativa del eje x y nos alejamos 3 unidades del y en dirección positiva del eje y. El punto corresponde al segundo cuadrante.

Situación 3

- (-4,-3), nos posicionamos en el origen y nos alejamos 4 unidades sobre el eje x en el sentido negativo y nos alejemos 3 unidades, del origen, sobre el eje y en el sentido negativo.

Situación 4

- (3, -4) desde el origen nos alejamos 3 unidades sobre el eje positivo de las x, desde acá nos alejamos 4 unidades sobre el eje de las y en el sentido negativo. Este punto corresponde al cuarto cuadrante.



PAUSA. Es conveniente que realicemos una nueva Pausa.

Pausa de Recapitulación.

1. ¿Cómo se expresa una ecuación de segundo grado?
2. ¿Cuál es la solución de una ecuación de 1º?
3. Transcriba las reglas para resolver una ecuación de 1º.
4. ¿Cómo se identifica una ecuación que carece de solución?
5. ¿Cómo se identifica una ecuación que tiene infinitas soluciones?
6. Represente un sistema rectangular de coordenadas cartesianas.
7. ¿Cómo se determina un punto en un sistema de coordenadas cartesianas?

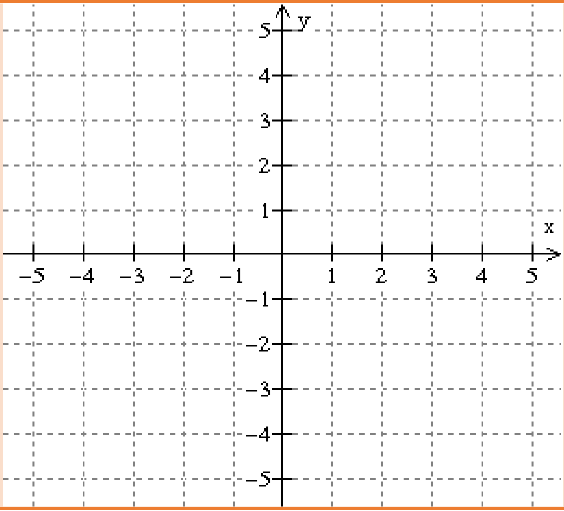
Actividades Obligatorias

3. Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado.

Orden	Ecuación	Resultado
a.	$3x = 6$	
b.	$2x - 3 = 6 - 3x$	
c.	$2(2x - 3) = 6 + x$	
d.	$\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = 1$	
e.	$\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 19$	
f.	$4(x - 10) = -6(2 - x) - 6x$	
g.	$2(x + 1) - 3(x - 2) = x + 6$	
h.	$\frac{x-1}{4} - \frac{x-5}{36} = \frac{x+5}{9}$	
i.	$\frac{3x+1}{7} - \frac{2-4x}{3} = \frac{-5x-4}{14} + \frac{7x}{6}$	
j.	$\frac{5}{x-7} = \frac{3}{x-2}$	
k.	$6\left(\frac{x-1}{8} - \frac{2x-3}{16}\right) = 3\left(\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)\right) - \frac{3}{8}(3x - 2)$	
l.	$2 - \left[-2(x + 1) - \frac{x-3}{2}\right] = \frac{2x}{3} - \frac{-5x-3}{12} + 3x$	
m.	$\frac{2}{3}\left[x - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)\right] + 1 = x$	
n.	$2 - \left[-2(x + 1) - \frac{x-3}{2}\right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$	

4. Representar los siguientes puntos en un sistema rectángulas de coordenadas cartesianas.

Orden	Puntos	Representación Gráfica
a.	$(3,4)$	
b.	$(-2,-1)$	
c.	$(4,4)$	
d.	$(0,-3)$	
e.	$(-2,0)$	

f.	$(0,0)$	
g.	$(-1,-1)$	
h.	$(2,-2)$	
i.	(-4,3)	

5. Dados los siguientes puntos indicar el cuadrante al cual corresponde.

Orden	Punto	Cuadrante
a.	$(3,4)$	
b.	$(-2,-1)$	
c.	$(4,4)$	
d.	$(1,-3)$	
e.	$(-2,5)$	
f.	$(-4,4)$	
g.	$(-1,-1)$	
h.	$(2,-2)$	
i.	(-4,3)	

Seguramente ha leído con interés el tema y ha dado respuesta a las preguntas y ejercicios solicitados. Es hora de continuar….

Ecuaciones de primer grado con dos variables

Una ecuación de primer grado con dos variables o incógnitas es una expresión de la forma $ax + by + c = 0$, donde a y b son los coeficientes, x e y son las variables y c el término independiente.

Situación 1

- $5x + 3y - 2 = 0$. Los coeficientes son 5 y 3 y el término independiente es -2.

Situación 2

- $x + 2y = 0$. Los coeficientes 1 y 2 y el término independiente es nulo, es decir es 0.

Situación 3

- $\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}y - 1 = 0$. Los coeficientes son $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{2}$, el término independiente es -1.

Soluciones de una ecuación de 1º grado con dos variables

Una ecuación de primer grado con dos variables tiene infinitas soluciones.

Una solución de una ecuación de primer grado es un par ordenado de valores reales (x, y) que al reemplazarlos por las variables x e y obtenemos una identidad.

Situación 1

- Dada la ecuación ,
  - tiene como soluciones al par (0,1), dado que al reemplazar la variable x por 0 y la variable y por 1 obtenemos una identidad: $2.0 - 2.1 + 2 = 0$.
  - El par $(1,1)$ no es una solución para la ecuación $2x - 2y + 2 = 0$, dado que al reemplazar obtenemos:

$$2.1 - 2.1 + 2 = 0,$$

sí operamos nos queda $2 \neq 0$ que no es una identidad.

- El par (3,4) es solución de la ecuación dado que al reemplazar en la misma obtenemos una identidad.

Forma explícita de una ecuación de 1º grado con dos variables

La forma explícita de una ecuación de primer grado con dos variables está dada por una ecuación de la forma $y = ax + b$, donde x es la variable independiente, y variable dependiente, el término a coeficiente lineal y b término independiente u ordenada al origen. A estas ecuaciones de primer grado con dos variables se las conoce como ecuaciones lineales dado que su representación gráfica corresponde a una línea recta.

Situación 1

- Si en la ecuación de primer grado con dos variables $2x - 3y = 0$ (ecuación expresada en forma implícita) despejamos la variable y obtenemos:

$$2x - 3y = 0$$
$$-3y = -2x$$

$$y = \frac{-2x}{-3}$$
$$y = \frac{2}{3}x$$

Situación 2

- Sea la ecuación de primer grado con dos variables $5x + 3y = 5$, si despejamos y, nos queda:

$$5x + 3y = 5$$
$$3y = 5 - 5x$$
$$y = \frac{5 - 5x}{3}$$
$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$$

Situación 3

- Si en la ecuación de primer grado con dos variables $-2x - 3y + 2 = 0$, despejamos y nos queda $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.

Situación 4

- $y = \frac{2}{3}x$ es una ecuación lineal cuyo coeficiente lineal es $\frac{2}{3}$, la ordenada al origen es 0.

Situación 5

- $y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$ es una ecuación lineal cuyo coeficiente lineal es $-\frac{5}{3}$ y el término independiente es $\frac{5}{3}$

Situación 6

- $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ es una ecuación lineal cuya ordenada al origen es $\frac{2}{3}$ y el coeficiente lineal es $-\frac{2}{3}$.

Representación gráfica de ecuaciones lineales

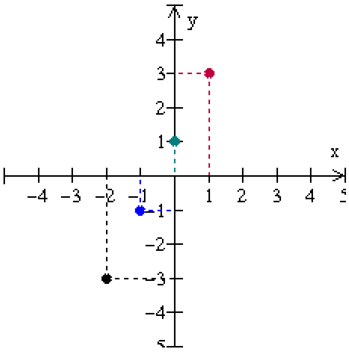
A partir de la forma explícita de una ecuación lineal $y = ax + b$construiremos una tabla de valores. La tabla de valores tiene 2 columnas, una de las columnas para la variable independiente x y una columna para la variable dependiente y. Dando valores a la variable x obtendremos valores para la variable y que satisfacen la identidad. Con los pares de punto (x, y) obtenidos a partir de la tabla procederemos a graficar dichos puntos y a trazar una recta que los una. La recta graficada corresponde a la ecuación lineal dada.

Situación 1

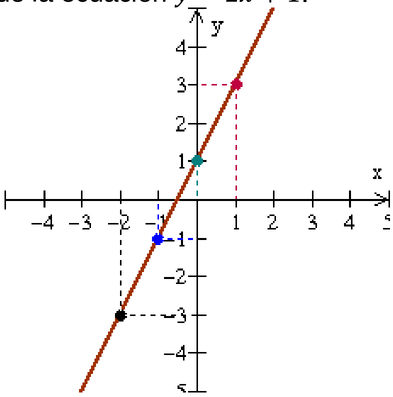
La tabla correspondiente a la ecuación lineal $y = 2x + 1$, para los valores 1, -1, 0 y 2 es:

x	y
1	$y = 2.1 + 1 = 3$
-1	$y = 2.(-1) + 1 = -1$
0	$y = 2.0 + 1 = 1$
2	$y = 2.(-2) + 1 = -3$

Con esto obtenemos los siguientes pares ordenados $(1{,}3); (-1,-1); (0{,}1); (-2,-3)$. Grafiquemos estos puntos.



Si los unimos obtenemos la gráfica de la ecuación $y = 2x + 1$.

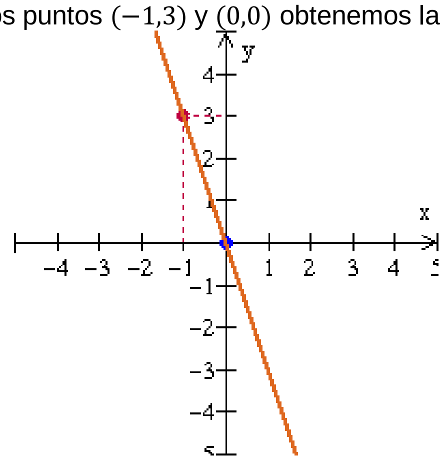


Situación 2

Graficar la ecuación lineal $y = -3x$, construimos la tabla de valores para dos valores arbitrarios -1 y 0.

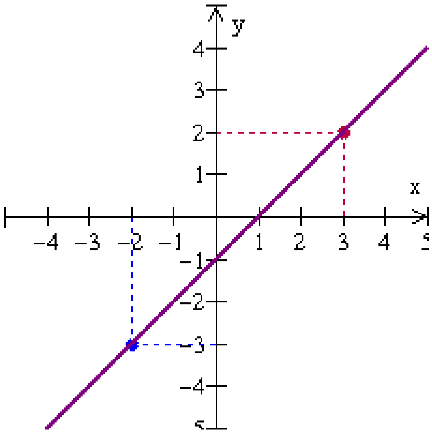
x	y
-1	$y = -3(-1)$ $= 3$
0	$y = (-3).0$ $= 0$

Trazando la recta que pasa por los puntos $(-1{,}3)$ y $(0{,}0)$ obtenemos la gráfica de la ecuación $y = -3x$.



Situación 3

- La gráfica de la ecuación $y = 3x - 2$ es la siguiente.



Pendiente y ordenada al origen

Vamos a analizar el significado de las letras a y b de una ecuación lineal en su forma explícita $y = ax + b$.

Dada la ecuación explícita de una ecuación lineal $y = ax + b$ cuya representación gráfica es una línea recta donde a representa la pendiente y b la ordenada al origen.

La pendiente de la recta está dada por el valor a y representa la inclinación de la recta respecto al eje horizontal.
La ordenada al origen está dada por el valor b de la ecuación explícita que indica donde la recta corta el eje $\vec{y}$.

Situación 1

- En $y = -7x + 2$, la pendiente es -7 y la ordenada al origen es 2.

Situación 2

- En $y = \frac{1}{3}x$, la pendiente es $\frac{1}{3}$ y la ordenada al origen es 0.

Situación 3

- En $y = x + \frac{5}{4}$, la pendiente es 1 y la ordenada al origen es $\frac{5}{4}$.

Representación de la recta conociendo la pendiente y la ordenada al origen

La pendiente y la ordenada al origen nos permitirán representar ecuaciones lineales a partir de estos dos valores.
Pare representar una ecuación lineal a partir de la pendiente y de la ordenada al origen procederemos de la siguiente forma.

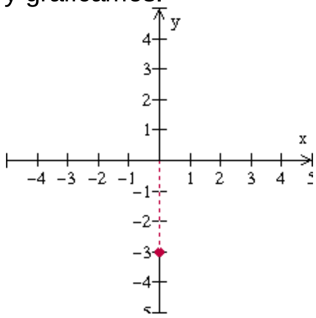
<u>Primero: gráfica de la ordenada al origen.</u>
El valor b nos aporta un primer punto de la recta que es donde está intercepta el eje $\vec{y}$, por lo tanto, obtenemos el punto $(0, b)$ que graficamos.

<u>Segundo: análisis de la pendiente.</u>
Dado el valor real $m$lo transformaremos en una fracción, siempre y cuando a no sea una fracción, donde el numerador nos indicará cuantas unidades hacia arriba (si a es positivo) o hacia abajo (si a es negativo) nos debemos mover desde la ordenada al origen y el denominador de la fracción en la que convertimos a nos indicará cuantas unidades a la derecha o a la izquierda nos debemos mover a partir de la ubicación anterior.

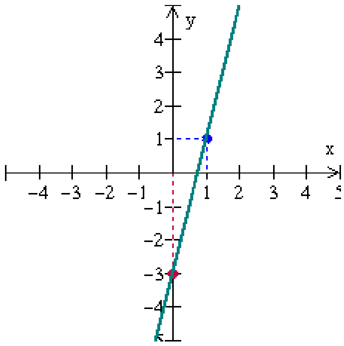
Situación 1

- Graficar $\boldsymbol{y = 4x - 3}$, en nuestro caso $a = 4$ y $b = -3$. Seguimos el procedimiento desarrollado.

1º Graficar la ordenada al origen. La ordenada al origen nos da el primer punto, el punto que intercepta el eje $\vec{y}$. Por lo tanto, obtenemos $(0,-3)$ y graficamos.

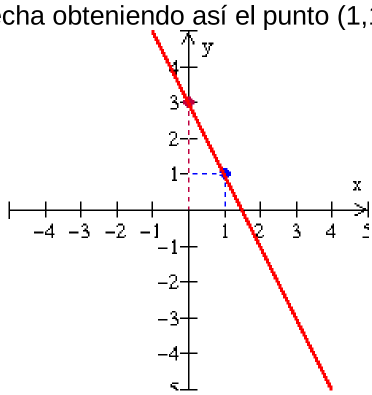


2º análisis de la pendiente. En nuestro caso la pendiente es $a = 4$, como no es una fracción la convertimos y nos queda $a = \frac{4}{1}$. Como el numerador es positivo nos moveremos 4 unidades hacia arriba llegando al punto de coordenadas (0,1), a partir de este punto nos movemos 1 unidad, como indica el denominador de la pendiente, a la derecha y graficamos el punto que obtenemos que es (1,1). Por estos dos puntos pasa la recta $y = 4x - 3$.



Situación 2

- Graficar $y = -2x + 3$. La pendiente es $a = -2$ y la ordenada al origen $b = 3$. El primer punto es $(0{,}3)$. La pendiente nos fraccionaria por lo tanto debemos convertirla en fracción y nos queda $a = \frac{-2}{1}$. Por lo tanto, a partir de $(0{,}3)$ debemos bajar dos unidades dado que el numerador es negativo y movernos una unidad a la derecha obteniendo así el punto (1,1).



Situación 3

- Graficar $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$. Aquí la pendiente es $a = \frac{3}{4}$ y la ordenada al origen es $b = -\frac{1}{2}$. La ordenada al origen nos aporta el punto $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. A partir de este punto nos debemos mover 3 unidades hacia arriba como indica el numerador de la pendiente y 4 unidades a la derecha. Así obtenemos el segundo punto de coordenadas $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$ y graficamos.

PAUSA. Nos detenemos a releer y practicar sobre el tema.

Pausa de Recapitulación.

1. ¿Cómo se expresa una ecuación de 1º grado con una variable?
2. ¿Cuál es la solución de una ecuación de 1º grado con una variable?

3. ¿Cuáles son la regla que debo tener en cuenta para resolver operaciones combinadas que involucren una ecuación de 1º grado con una variable?
4. Trace un sistema rectangular de coordenadas cartesianas e identifique sus cuadrantes.
5. ¿Cómo se determina un punto en un sistema rectangular de coordenadas cartesianas?
6. ¿Cuál es la forma de una ecuación de 1º grado con dos variables?
7. ¿Cuántas son las soluciones de una ecuación de 1º grado con dos variables?
8. ¿Cuál es la forma explícita de una ecuación de 1º grado con dos variables?
9. ¿Cuál es la forma implícita de una ecuación de 1º grado con dos variables?
10. ¿Cuál es la representación gráfica de una ecuación de 1º grado con dos variables?
11. ¿Cómo identifica la pendiente y la ordenada al origen de una ecuación lineal?
12. Describa los pasos para tener en cuenta para representar una recta a partir de la pendiente y de la ordenada al origen.

Actividades Obligatorias

6. Dadas las siguientes ecuaciones identificar los datos que se solicitan.

Orden	Ecuación	Variables	Término independiente
a.	$y = 6x + 3$		
b.	$y + 2x = 3$		
c.	$3x + 5y = 2$		
d.	$z - 2w + 2 = 0$		
e.	$-z + 2w = 7$		
f.	$6x + y = -1$		
g.	$3x + 2y - 3 = 0$		
h.	$\frac{1}{4}x + \frac{2}{7}y = -\frac{1}{3}$		
i.	$9y - 5x + 2 = 0$		

7. Dadas las siguientes ecuaciones expresarlas según el siguiente cuadro.

Orden	Forma explícita	Forma general
a.	$y = 16x - 2$	
b.		$3x + 5y = 2$
c.	$y = -x + 10$	
d.		$z - 2w + 2 = 0$
e.	$z = 3w + 2$	
f.		$6x + y = -1$
g.	$y = 5x + 5$	
h.	$s = 3r + 1$	
i.		$9y - 5x + 2 = 0$

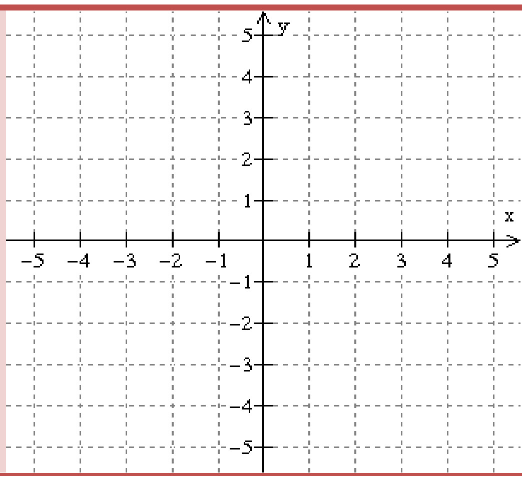
8. Dar al menos tres pares de puntos que satisfagan las siguientes ecuaciones.

Orden	Ecuación	Puntos
a.	$y = 16x - 2$	
b.	$3x + 5y = 2$	
c.	$y = -x + 10$	
d.	$z - 2w + 2 = 0$	
e.	$z = 3w + 2$	
f.	$6x + y = -1$	
g.	$y = 5x + 5$	
h.	$s = 3r + 1$	
i.	$9y - 5x + 2 = 0$	

9. Resolver las siguientes ecuaciones lineales.

Orden	Ecuación	Solución x
a.	$y = 16x - 2$	
b.	$3x + 5y = 2$	
c.	$y = -x + 10$	
d.	$z - 2w + 2 = 0$	
e.	$z = 3w + 2$	
f.	$6x + y = -1$	
g.	$y = 5x + 5$	
h.	$s = 3r + 1$	
i.	$9y - 5x + 2 = 0$	

10. Representar gráficamente las siguientes ecuaciones lineales mediante tablas.

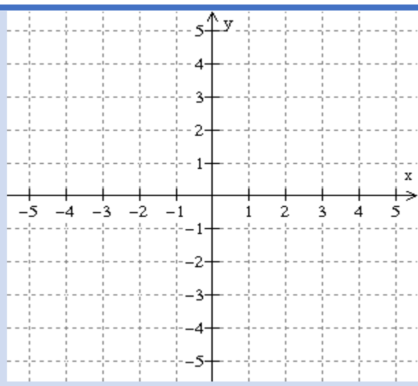
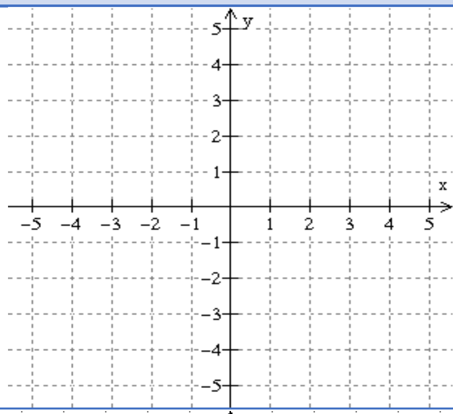
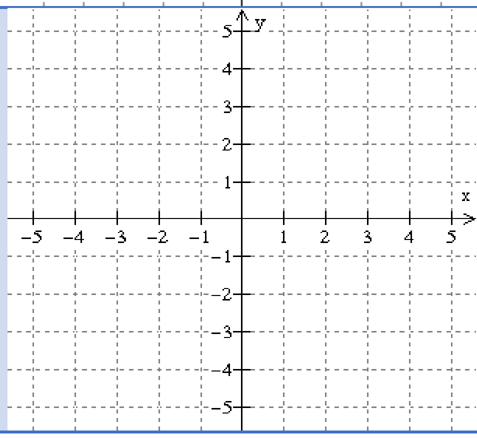
<table>
<tr><th>Orden</th><th>Ecuación</th><th>Puntos</th></tr>
<tr><td>a.</td><td>$y = x - 3$</td><td rowspan="9">
</td></tr>
<tr><td>b.</td><td>$y = x + 4$</td></tr>
<tr><td>c.</td><td>$y = \frac{1}{2}x - 5$</td></tr>
<tr><td>d.</td><td>$y = -x$</td></tr>
<tr><td>e.</td><td>$y = x$</td></tr>
<tr><td>f.</td><td>$y = -x - 1$</td></tr>
<tr><td>g.</td><td>$y = 4x + 8$</td></tr>
<tr><td>h.</td><td>$3x + 5y = 1$</td></tr>
<tr><td>i.</td><td>$y - 5x + 2 = 0$</td></tr>
</table>

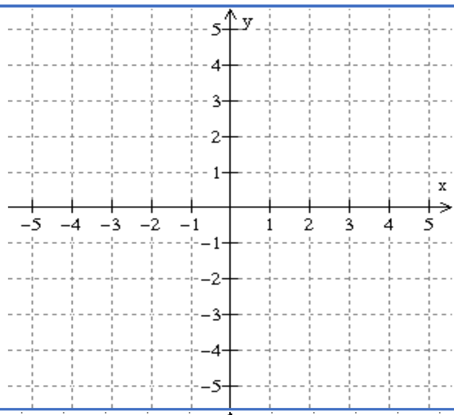
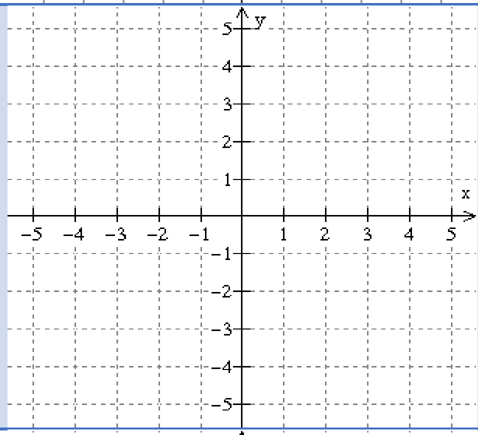
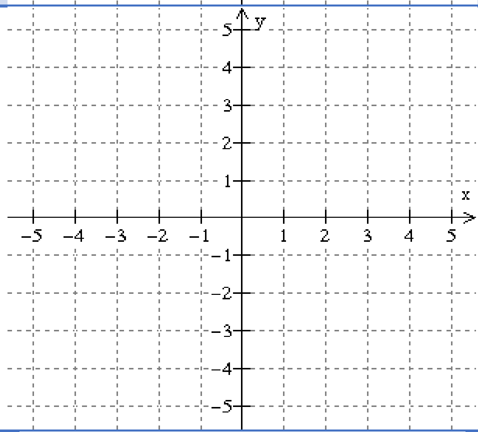
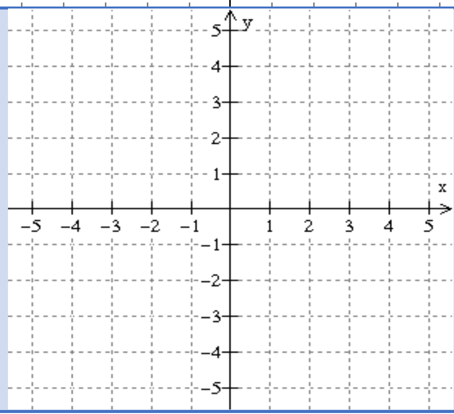
11. Dadas las siguientes ecuaciones indicar la pendiente y ordenada al origen.

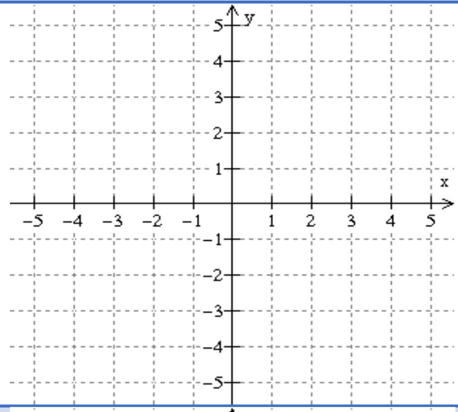
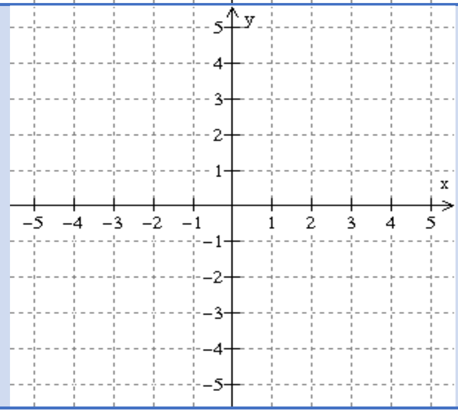
Orden	Ecuación	Pendiente	Ordenada al origen
a.	$y = x - 3$		

b.	$y = x + 4$		
c.	$y = \frac{1}{2}x - 5$		
d.	$y = -x$		
e.	$y = x$		
f.	$y = -x - 1$		
g.	$y = 4x + 8$		
h.	$3x + 5y = 1$		
i.	$y - 5x + 2 = 0$		

12. Representar gráficamente las siguientes ecuaciones utilizando la pendiente y la ordenada al origen.

Orden	Ecuación	Gráfica
a.	$y = x - 3$	
b.	$y = x + 4$	
c.	$y = \frac{1}{2}x - 5$	

d.	$y = -x$	
e.	$y = x$	
f.	$y = -x - 1$	
g.	$y = 4x + 8$	

h.	$3x + 5y = 1$	
i.	$y - 5x + 2 = 0$	

Continuemos…

Sistemas de ecuaciones simultaneas de 1º grado con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.

Dos o más ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son simultáneas cuando se satisfacen por iguales valores de las incógnitas. Así, las ecuaciones $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$, son simultáneas porque $x = 3$ y $y = 2$ satisfacen ambas ecuaciones.

Situación 1
Son sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

- $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 15 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$
- $\begin{cases} x - y = 1 \\ 5x + 2y = -2 \end{cases}$

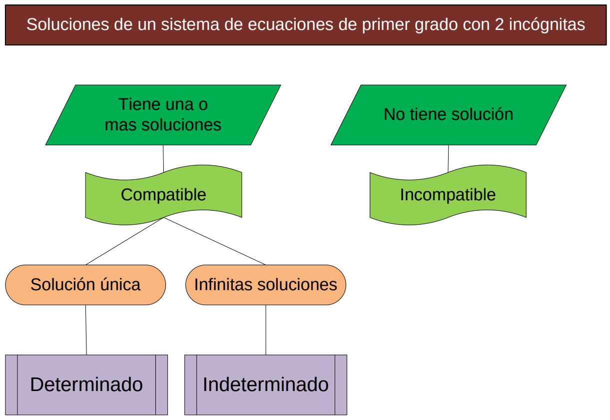
Solución de un sistema de ecuaciones de 1º grado con 2 variables

Una solución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables es un grupo de valores que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.

Situación 1

- Dado el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$, son soluciones del sistema $x = 2, y = 3$. Si reemplazamos por las variables los valores encontrados se satisfacen las dos ecuaciones.

Las soluciones de un sistema de ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas se resumen en el siguiente cuadro:



A continuación, estudiaremos tres métodos, que no son los únicos, para resolver sistemas de ecuaciones de primer grado con dos variables, ellos son:

1. Método de igualación.
2. Método de sustitución.
3. Método de reducción.

Método de igualación

Una primera técnica algebraica común para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es el **método de igualación**. Este método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones resultantes; se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita obtenida y se sustituye este valor en las ecuaciones iníciales.

Sea, por ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

Despejamos x de ambas ecuaciones, y obtenemos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \to 3x = -2y + 8 \to x = -\dfrac{2}{3}y + \dfrac{8}{3} \\ 4x - 3y = 5 \to 4x = 3y + 5 \to x = \dfrac{3}{4}y + \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Si igualamos los valores obtenidos, nos queda :

$$-\frac{2}{3}y + \frac{8}{3} = \frac{3}{4}y + \frac{5}{4}$$

Despejamos la variable y, entonces:

$$-\frac{2}{3}y + \frac{8}{3} = \frac{3}{4}y + \frac{5}{4} \to -\frac{2}{3}y - \frac{3}{4}y = -\frac{8}{3} + \frac{5}{4} \to -\frac{17}{12}y = -\frac{17}{12} \to y = 1$$

Si reemplazamos el valor encontrado para la variable y en cualquiera de las ecuaciones obtendremos el valor de x,

$$\begin{cases} 3x + 2.1 = 8 \to 3x = 8 - 2 \to x = \dfrac{6}{3} = 2 \\ 4x - 3.1 = 5 \to 4x = 3 + 5 \to x = \dfrac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

Entonces hemos encontrados los valores que satisfacen simultáneamente las ecuaciones del sistema y estos son $x = 2, y = 1$.

Método de sustitución

El segundo método se denomina método de sustitución, consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra; así, se obtiene una sola ecuación con una incógnita. Una vez obtenido el valor de esta incógnita, se sustituye su valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema, inicial para calcular el valor de la otra incógnita.

Aplicamos este método al sistema del ejemplo anterior:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

Despejamos x en la primera ecuación, obtenemos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \rightarrow 3x = -2y + 8 \rightarrow x = -\frac{2}{3}y + \frac{8}{3} \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

Reemplazamos el valor encontrado de la variable x en la segunda ecuación, nos queda:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \rightarrow 3x = -2y + 8 \rightarrow x = -\frac{2}{3}y + \frac{8}{3} \\ 4\left(-\frac{2}{3}y + \frac{8}{3}\right) - 3y = 5 \end{cases}$$

Como observamos la segunda ecuación nos queda toda en la variable y, la despejamos y obtendremos la solución para esta variable:

$$\begin{aligned} &4\left(-\frac{2}{3}y + \frac{8}{3}\right) - 3y = 5 \rightarrow -\frac{8}{3}y + \frac{32}{3} - 3y \\ &= 5 \rightarrow -\frac{8}{3}y - 3y \\ &= -\frac{32}{3} + 5 \rightarrow -\frac{17}{3}y \\ &= -\frac{17}{3} \rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

Si reemplazamos el valor encontrado para la variable y en cualquiera de las ecuaciones obtendremos el valor de x,

$$\begin{cases} 3x + 2.1 = 8 \rightarrow 3x = 8 - 2 \rightarrow x = \frac{6}{3} = 2 \\ 4x - 3.1 = 5 \rightarrow 4x = 3 + 5 \rightarrow x = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

Entonces hemos encontrados los valores que satisfacen simultáneamente las ecuaciones del sistema y estos son $x = 2, y = 1$.

Método de reducción

El tercer método se denomina método de reducción, consta de los siguientes pasos:

- Se multiplican o dividen los miembros de las dos ecuaciones por los números que convengan para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas.
- Se restan las dos ecuaciones resultantes, con lo que se elimina una incógnita.
- Se resuelve la ecuación con una incógnita obtenida, y se sustituye su valor en cualquiera de las ecuaciones iníciales para calcular la segunda.

Ejemplo:

Continuemos con el mismo sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$

El primer paso nos indica que debemos multiplicar o dividir los miembros de las dos ecuaciones por los números que convengan para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \rightarrow \text{Multiplicamos por 4 este ecuación y nos queda} \\ \qquad \rightarrow 12x + 8y = 32 \\ 4x - 3y = 5 \rightarrow \text{Multiplicamos por 3 esta ecuación y nos queda} \\ \qquad \rightarrow 12x - 9y = 15 \end{cases}$$

De esta forma hemos obtenido un sistema equivalente:

$$\begin{cases} 12x + 8y = 32 \\ 12x - 9y = 15 \end{cases}$$

Por el segundo paso debemos restar las dos ecuaciones y obtenemos:

$$\begin{array}{r} 12x + 8y = 32 \\ - \quad 12x - 9y = 15 \\ \hline 17y = 17 \end{array}$$

$$\rightarrow y = 1$$

Si reemplazamos el valor encontrado para la variable y en cualquiera de las ecuaciones obtendremos el valor de x,

$$\begin{cases} 3x + 2.1 = 8 \rightarrow 3x = 8 - 2 \rightarrow x = \dfrac{6}{3} = 2 \\ 4x - 3.1 = 5 \rightarrow 4x = 3 + 5 \rightarrow x = \dfrac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

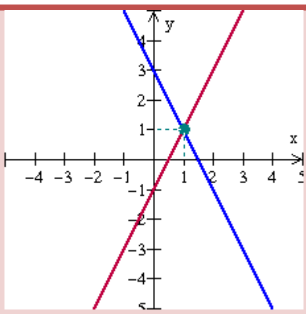
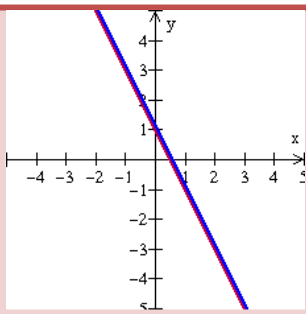
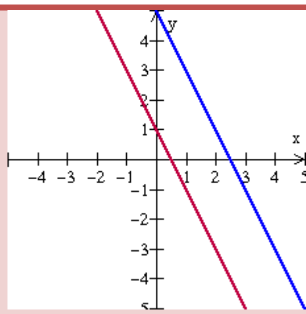
Entonces hemos encontrados los valores que satisfacen simultáneamente las ecuaciones del sistema y estos son $x = 2, y = 1$.

Representación de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos variables

Una ecuación lineal con dos incógnitas, $ax + by + c = 0$, se representa mediante una recta.
La representación de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en un par de rectas.

- Si éstas se cortan, el sistema es compatible determinado y las coordenadas del punto de corte son la solución del sistema.
- Si las rectas son paralelas, el sistema es incompatible.
- Si las rectas son coincidentes (son la misma recta), el sistema es compatible indeterminado: sus soluciones son los puntos de la recta, por lo tanto, son infinitas.

Gráficamente tenemos los siguientes casos.

Sistema compatible determinado	**Sistema compatible indeterminado**	**Sistema incompatible**
		
Una única solución	**Infinitas soluciones**	**Ninguna solución**

PAUSA. Repasamos, releemos y practicamos.

Pausa de Recapitulación

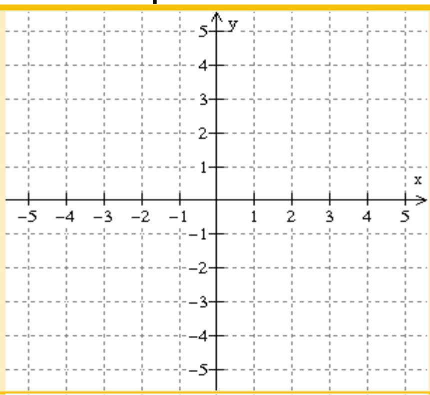
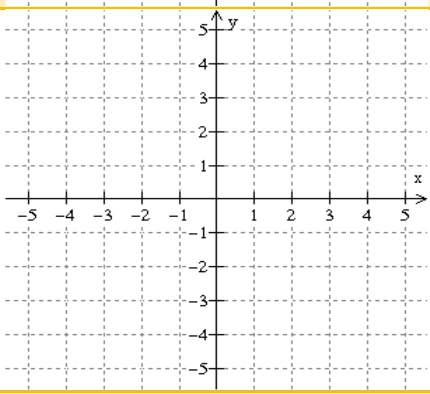
1. ¿A qué definimos como un sistema de ecuaciones simultaneas de 1º grado con dos incógnitas?
2. ¿Qué se define como solución de un sistema de ecuaciones de 1º grado con dos variables?
3. ¿Cómo se clasifican las soluciones de un sistema de ecuaciones de 1º grado con dos variables?
4. ¿Cuáles son los métodos que tratamos para resolver un sistema de ecuaciones de 1º grado con dos variables?
5. ¿Cómo se representan los sistemas de ecuaciones de 1º grado con dos variables?

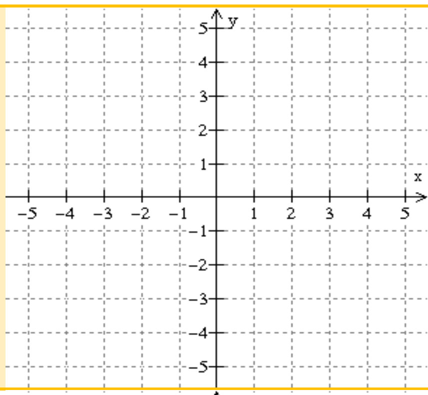
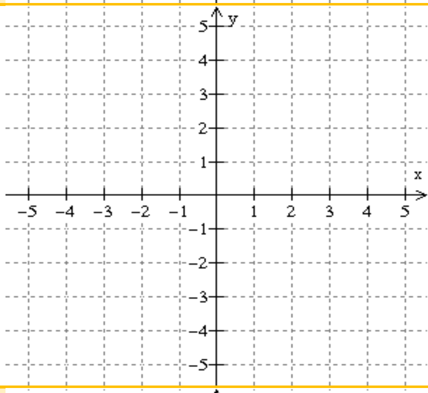
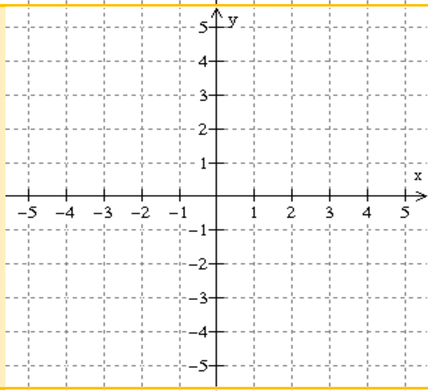
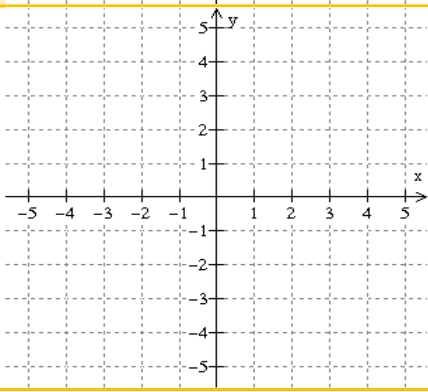
Actividades Obligatorias

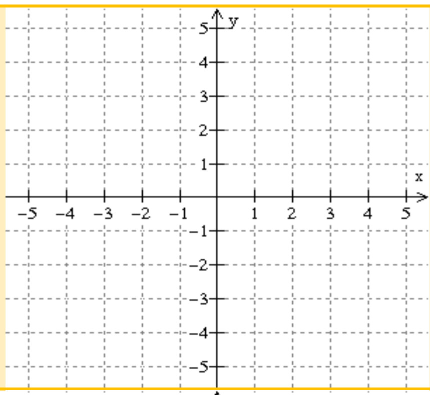
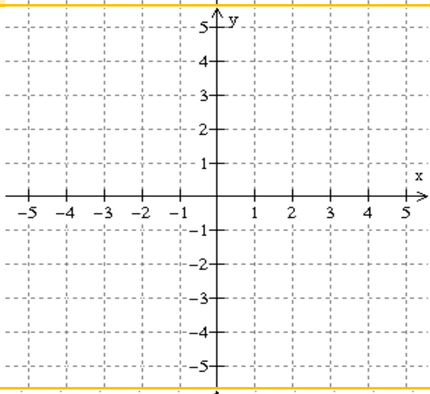
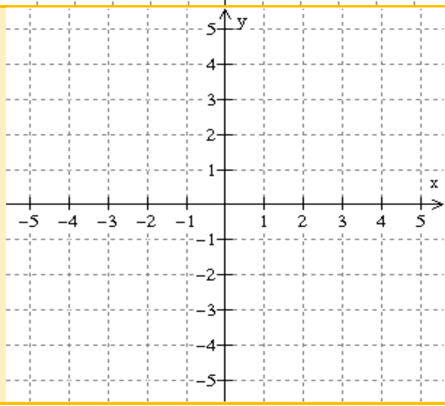
13. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

Orden	Ecuación	x	y
a.	$\begin{cases} -x+2y=-1 \\ 3x+4y=13 \end{cases}$		
b.	$\begin{cases} 2x-5y=-9 \\ 4x+3y=-10 \end{cases}$		
c.	$\begin{cases} 4x+3y=10 \\ 7x-2y=3 \end{cases}$		
d.	$\begin{cases} 4x-y=-6 \\ 6x+3y=0 \end{cases}$		
e.	$\begin{cases} -x-y=-1 \\ 5x+4y=-3 \end{cases}$		
f.	$\begin{cases} 5x-y=-12 \\ -11x-2y=-3 \end{cases}$		
g.	$\begin{cases} x-4y=5 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$		
h.	$\begin{cases} 3x+10y=4 \\ 2x+2y=-5 \end{cases}$		
i.	$\begin{cases} 6x+3y=8 \\ -3x-2y=3 \end{cases}$		

14. Representar gráficamente los siguientes sistemas e indicar el tipo de solución.

Orden	Ecuación	Representación	Tipo
a.	$\begin{cases} -x+2y=-1 \\ 3x+4y=13 \end{cases}$		
b.	$\begin{cases} 2x-5y=-9 \\ 4x+3y=-10 \end{cases}$		

c.	$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 7x - 2y = 3 \end{cases}$		
d.	$\begin{cases} 4x - y = -6 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$		
e.	$\begin{cases} -x - y = -1 \\ 5x + 4y = -3 \end{cases}$		
f.	$\begin{cases} 5x - y = -12 \\ -11x - 2y = -3 \end{cases}$		

g.	$\begin{cases} x-4y=5 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$		
h.	$\begin{cases} 3x+10y=4 \\ 2x+2y=-5 \end{cases}$		
i.	$\begin{cases} 6x+3y=8 \\ -3x-2y=3 \end{cases}$		

Ecuaciones de segundo grado

Recordemos: fórmula general de una ecuación de segundo grado

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$$

En la que a, b y $c$son números reales y con $a \neq 0$.

En el caso de ecuaciones de segundo grado diremos que:
a es el coeficiente cuadrático,
b es el coeficiente lineal, y
c es el término independiente.

Situación 1

- $3x^2+5x+2=0$, es una ecuación de segundo grado con coeficiente cuadrático igual a 3, coeficiente lineal igual a 5 y término independiente 2.

Situación 2

- $-x^2+3x=0$, es una ecuación de segundo grado con coeficiente cuadrático -1, coeficiente lineal 3 y término independiente igual a 0.

Situación 3

- $x^2 = 0$, es una ecuación de segundo grado con coeficiente cuadrático igual a 1, coeficiente lineal y término independientes nulos, es decir iguales a 0.

Resolución de Ecuaciones de segundo grado incompletas

Decimos que una ecuación de segundo grado es incompleta cuando las variables b o c son nulas.

Para resolver ecuaciones de segundo grado incompletas recurrimos a los siguientes casos:

Primer caso: Cuando $b = 0$, nos que una ecuación de la forma $ax^2 + c$, para resolverla despejamos de la forma usual x.

Segundo caso: Cuando $c = 0$, nos queda una ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$, donde aplicamos el primer caso de factoreo y nos queda $x(ax + b) = 0$, esto es un producto igualado a cero esto se cumple cuando cualquiera de los factores es 0. Por lo tanto, son raíces de este polinomio $x = 0$ y $ax + b = 0$.

Tercer caso: Cuando $b = 0$ y $c = 0$, nos que una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 = 0$, al despejar la variable observamos que los valores que hacen cero la ecuación es $x = 0$.

Situación 1

- Resolver $4x^2 - 4 = 0$., es una ecuación de segundo grado incompleta, el término $a = 4; b = 0; c = 4$; por lo tanto, para resolverla tenemos que despejar de la forma usual $4x^2 = 4 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$. Por lo tanto, los valores de $x$que hacen cero la ecuación es $x = 1$ y $x = -1$.

Situación 2

- $x^2 + 3x = 0$, es otra ecuación de segundo grado incompleta en este caso el término c es nulo o $c = 0$, por lo que debemos aplicar factor común quedando $x^2 + 3x = x(x + 3)$, para $x(x + 3) = 0$ el primer factor es cero o el segundo factor es cero por lo que $x = 0$ y $x = -3$ son los valores de x que solucionan la ecuación.

Situación 3

- $7x^2 = 0$, es una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 = 0$, donde $a = 7; b = 0; c = 0$, por lo debemos despejar x para encontrar los valores que hacen cero la ecuación. Despejemos $7x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{0}{7} \rightarrow x = \pm\sqrt{0} = 0$. Así obtenemos que $x = 0$ es el único valor que puede tomar la variable para solucionar la ecuación.

Resolución general de la ecuación de segundo grado completa

Resolver una ecuación de segundo grado completa de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ implica encontrar los valores de x que anulan la ecuación. Para ello utilizaremos la fórmula resolvente para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

A una de las raíces la denominaremos x_1 cuyo valor es $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y a la segunda raíz la denotamos x_2 cuyo valor es $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Situación 1

- Encontrar las raíces de la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$, en nuestro caso $a = 1$; $b = 2$ y $c = -3$, utilizamos la fórmula resolvente para encontrar raíces de ecuaciones cuadráticas $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, en nuestro caso la 1º raíz es:
- $x_1 = \frac{-2+\sqrt{2^2-4.1.(-3)}}{2.1} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$; la segunda raíz es:

- $x_2 = \frac{-2-\sqrt{2^2-4.1.(-3)}}{2.1} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = 3$. Por lo tanto, los valores de x que anulan la ecuación son $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$.

Situación 2

- $2x^2 + 12x + 18 = 0$, tiene como valores $a = 2$; $b = 12$ y $c = 18$, aplicamos la fórmula resolvente para obtener las raíces de una ecuación cuadrática y reemplazando nos queda $x_{1,2} = \frac{-12\pm\sqrt{12^2-4.2.18}}{2.2}$, por lo tanto:
  $x_1 = \frac{-2+\sqrt{12^2-4.2.18}}{2.2} = \frac{-12+\sqrt{144-144}}{4} = \frac{-12+0}{4} = \frac{-12}{4} = -3$ y la segunda raíz es $x_2 = \frac{-2-\sqrt{12^2-4.2.18}}{2.2} = \frac{-12-\sqrt{144-144}}{4} = \frac{-12-0}{4} = \frac{-12}{4} = -3$, conclusión las raíces son $x_1 = -3$ y $x_2 = -3$.
- Encontrar las raíces para $-x^2 - 4x + 12$, en este caso $a = -1; b = -4$ y $c = 12$, aplicando la formula resolvente nos queda $\frac{+4\pm\sqrt{16-4(-1)12}}{-2}$, por la tanto las raíces son $x_1 = -6; x_2 = 2$.

Discriminante

Definimos como discriminante de la fórmula de raíces cuadráticas al término $b^2 - 4ac$. El discriminante se denota con el símbolo Δ y nos informa sobre el carácter de las raíces que podemos obtener de una ecuación cuadrática, según los siguientes valores:

- **$\Delta > 0 \rightarrow$ la ecuación de segundo grado tiene dos raíces, reales y distintas.**
- **$\Delta = 0 \rightarrow$, la ecuación de segundo grado tiene dos raíces, reales iguales.**
- **$\Delta < 0 \rightarrow$, la ecuación de segundo grado tiene dos raíces, complejas conjugadas. Este caso no va a ser objeto de resolución en este curso. Por ello basta con informar el carácter de las raíces y no resolver la ecuación.**

Situación 1

- Encontrar el carácter de la discriminante de la ecuación$x^2 + 2x - 3 = 0$, en nuestro caso $a = 1$; $b = 2$ y $c = -3$ aplicamos la fórmula de la discriminante y obtenemos $\Delta = 2^2 - 4.1.(-3) = 4 + 12 = 16$, por lo cual la $\Delta > 0$ entonces la ecuación dada tiene dos raíces, reales y distintas.

Situación 2

- Encontrar el carácter de las raíces de la ecuación $2x^2 + 12x + 18 = 0$, aplicamos la fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$, y obtenemos $\Delta = 12^2 - 4.2.18 = 0$, entonces la ecuación dada tiene dos raíces reales iguales.

Situación 3

- Encontrar el carácter de las raíces de la ecuación $3x^2 + 5x + 9 = 0$, en este caso $a = 3$; $b = 5$y $c = 9$, aplicamos la fórmula de la discriminante y nos queda $\Delta = 3^2 - 4.3.9 = 9 - 108 = -99$, por lo tanto, esta ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas. No resolvemos la ecuación.

Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado

Las raíces de una ecuación de segundo grado cumplen las siguientes propiedades:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$

$$\boldsymbol{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Utilizamos estas propiedades para verificar si hemos calculado bien las raíces que nos piden.

Situación 1

- Las raíces de la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$; son $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$ y $a = 1$; $b = 2$ y $c = -3$, entonces $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \rightarrow 1 + (-3) = \frac{-2}{1} \rightarrow -2 = -2$ observamos que se cumple la primer propiedad de las raíces; $x_1.x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow 1(-3) = \frac{-3}{1} \rightarrow -3 = -3$ verificamos así que se cumple la segunda propiedad.

Situación 2

- $2x^2 + 12x + 18 = 0$, tiene como valores $a = 2$; $b = 12$ y $c = 18$; y como raíces $x_1 = -3$ y $x_2 = -3$. Aplicamos la primera propiedad y nos queda $(-3) + (-3) = -\frac{12}{2} \rightarrow -6 = -6$, que se verifica y $(-3).(-3) = \frac{18}{2} \rightarrow 9 = 9$ y esta propiedad también se verifica.

Situación 3

- Para $-x^2 - 4x + 12 = 0$, en este caso $a = -1$; $b = -4$ y $c = 12$, las raíces son $x_1 = -6$; $x_2 = 2$, por lo tanto la primer propiedad queda $(-6) + 2 = \frac{4}{-4} \rightarrow -4 = -4$ y la segunda $(-6)2 = \frac{12}{-1} \rightarrow -12 = -12$, como observamos ambas se verifican.

Representación gráfica de una ecuación de segundo grado.

Toda ecuación de segundo grado con una sola incógnita tiene como representación gráfica una parábola.

Para representar gráficamente una parábola en forma aproximada debemos contar con las coordenadas que obtenemos de:

- Las coordenadas de las raíces, en caso de que estas sean reales.
- Las coordenadas del vértice de la parábola.
- Los puntos de intersección con el eje y.

Recordemos que la fórmula resolvente nos permitía encontrar los valores x_1 y x_2 que son los ceros de la ecuación, es decir los puntos de intersección con el eje $\vec{x}$. Obtenemos así puntos de la forma $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

Ahora definiremos las fórmulas que nos permiten encontrar el vértice de la parábola.

Situación 1

- Las raíces de la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$ son $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$. Por lo tanto, obtenemos las coordenadas de los puntos que interceptan el eje $\vec{x}$, que son $(1,0)$ y $(-3,0)$.

Situación 2

- $2x^2 + 12x + 18 = 0$, tiene como raíces $x_1 = -3$ y $x_2 = -3$. Obtenemos el punto $(-3,0)$.

Situación 3

- Para $-x^2 - 4x + 12 = 0$, las raíces son $x_1 = -6$; $x_2 = 2$, por lo tanto, los puntos de intersección con el eje $\vec{x}$ son $(-6,0)$ y $(2,0)$.

Las coordenadas del vértice de una parábola generada por una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$se pueden obtener al aplicar las siguientes fórmulas.

Coordenada x del vértice de la parábola $x_v = \frac{-b}{2a}$.

Coordenada y del vértice de la parábola $y_v = \frac{4.a.c-b^2}{4a}$.

Situación 1

- En la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$; $a = 1$ $b = 2$y $c = -3$ por lo tanto las coordenadas del vértice son $x_v = \frac{-2}{2.1} = \frac{-2}{2} = -1$ e $y_v = \frac{4.1.(-3)-2^2}{4.1} = \frac{-16}{4} = -4$. Obtenemos así las coordenadas del vértice $(-1, -4)$.

Situación 2

- En $2x^2 + 12x + 18 = 0$ $a = 2$; $b = 12$ y $c = 18$, por lo tanto, las coordenadas del vértice son $x_v = \frac{-12}{2.2} = \frac{-12}{4} = -3$ y la coordenada $y_v = \frac{4.2.18-12^2}{4.2} = \frac{0}{8} = 0$. Se obtiene así el punto $(-3{,}0)$.

Situación 3

- Para $-x^2 - 4x + 12 = 0$, tenemos $a = -1$; $b = -4$ y $c = 12$, las coordenadas del vértice son $x_v = \frac{-(-4)}{2.(-1)} = \frac{4}{-2} = -2$ y la coordenada $y_v = \frac{4.(-1).12-(-4)^2}{4.(-1)} = 16$. Entonces las coordenadas del vértice son $(-2{,}16)$.

El punto de intersección de una parábola, cuya ecuación general es $ax^2 + bx + c = 0$, con el eje $\vec{y}$ tiene como coordenadas $(0, c)$.

Situación 1

- En la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$; $a = 1$ $b = 2$y $c = -3$ por lo tanto el punto de intersección con el eje $\vec{y}$ es $(0, -3)$.

Situación 2

- En $2x^2 + 12x + 18 = 0$ $a = 2$; $b = 12$ y $c = 18$, el punto de intersección con el eje $\vec{y}$ es $(0{,}18)$.

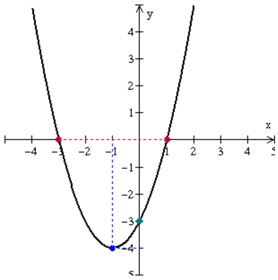
Situación 3

- Para $-x^2 - 4x + 12 = 0$, tenemos $a = -1$; $b = -4$ y $c = 12$, el punto de intersección con el eje $\vec{y}$ es $(0{,}12)$.

Con las coordenadas de los puntos encontrados podemos esbozar la gráfica de una ecuación de segundo grado.

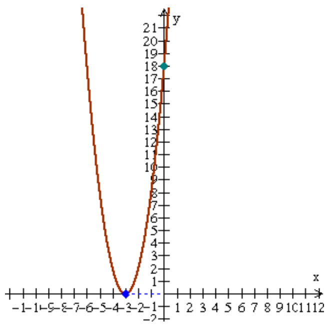
Situación 4

- De la ecuación $x^2 + 2x - 3= 0$ obtuvimos los siguientes puntos:
  - De las raíces: $(1{,}0)$ + y $(-3{,}0)$
  - Del vértice $(-12{,}0)$
  - De la intersección con el $\vec{y}$ $(0, -3)$



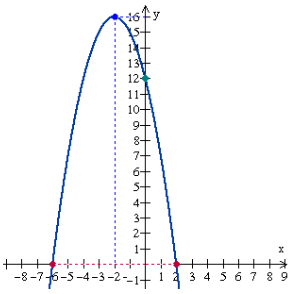
Situación 5

- De la ecuación $2x^2 + 12x + 18 = 0$, obtuvimos:
  - De las raíces: $(-3{,}0)$
  - Del vértice $(-3{,}0)$
  - De la intersección con el $\vec{y}$ $(0{,}18)$



Situación 6

- Para $-x^2 - 4x + 12 = 0$, su gráfica es la siguiente:



PAUSA. Lo invitamos a una pausa.

Pausa de Recapitulación

1. ¿Cuál es la fórmula general de una ecuación de 2º?
2. Describa los distintos casos para resolver ecuaciones de 2º
3. ¿Cuántas son las raíces de una ecuación 2º?
4. ¿Qué nos informa la discriminante?
5. ¿Cuál es la fórmula para calcular la discriminante?
6. ¿Cuáles son las propiedades de las raíces de una ecuación de 2º?
7. ¿Cuál es la representación gráfica de una ecuación de 2º?
8. ¿Cuáles son las fórmulas de coordenadas del vértice de una parábola?

Actividad Obligatoria

15. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas.

Orden	Ecuación	Solución
a.	$x^2 = 0$	
b.	$x^2 - 4 = 0$	
c.	$x^2 + 3x = 0$	
d.	$x^2 + 4 = 0$	
e.	$3x^2$	
f.	$5x^2 - 5 = 3$	
g.	$\frac{3}{4}x^2$	
h.	$\frac{1}{2}x^2 + 5x = 0$	
i.	$x^2 - \frac{5}{4} = \frac{2}{3}$	

16. Encontrar el carácter de las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

Orden	Ecuación	Carácter de las raíces
a.	$2x^2 - 3x - 5 = 0$	
b.	$x^2 - x - 20 = 0$	
c.	$4x^2 + 4x - 1 = 0$	
d.	$x^2 + 4 = 0$	
e.	$x^2 - 14x + 4 = 0$	
f.	$x^2 - x + 1 = 0$	
g.	$\frac{3}{4}x^2 = 0$	
h.	$2x^2 - 3x + 5 = 0$	
i.	$25x^2 + 20x + 4 = 0$	

17. Encontrar las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

Orden	Ecuación	Raíces
a.	$x^2 - 5x + 6 = 0$	
b.	$2x^2 - 7x + 3 = 0$	
c.	$-x^2 + 7x - 10 = 0$	
d.	$x^2 - 2x + 1 = 0$	
e.	$x^2 + x + 1 = 0$	
f.	$x^2 - 4x + 4 = 0$	
g.	$2x - 3 = 1 - 2x + x^2$	
h.	$x^2 + (7 - x)^2 = 25$	
i.	$7x^2 + 21x - 28 = 0$	

18. Factorizar las siguientes ecuaciones de segundo grado.

Orden	Ecuación	Factores
a.	$x^2 - 5x + 6 = 0$	
b.	$2x^2 - 7x + 3 = 0$	
c.	$-x^2 + 7x - 10 = 0$	
d.	$x^2 - 2x + 1 = 0$	
e.	$x^2 + x + 1 = 0$	

f.	$x^2 - 4x + 4 = 0$	
g.	$2x - 3 = 1 - 2x + x^2$	
h.	$x^2 + (7 - x)^2 = 25$	
i.	$7x^2 + 21x - 28 = 0$	

19. Encontrar el valor de k para que las siguientes ecuaciones admitan a) una raíz doble, b) dos raíces reales distintas y c) raíces imaginarias.

Orden	Ecuación	a)	b)	c)
a.	$x^2 - 5x + k = 0$			
b.	$3x^2 + 8x + k = 0$			
c.	$2x^2 - 6x + k = 0$			
d.	$25x^2 + kx + 1 = 0$			
e.	$x^2 - 2kx + 4 = 0$			
f.	$x^2 - 12x + k = 0$			
g.	$x^2 - 2x + k = 0$			
h.	$2x^2 + kx + 1 = 0$			
i.	$-3x^2 + 2x + k = 0$			

20. Encontrar los datos que se solicitan de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

Orden	Ecuación	Coordenadas		
		Vértice	Raíces	Intersección eje $\vec{y}$
a.	$x^2 - 5x + 6 = 0$			
b.	$2x^2 - 7x + 3 = 0$			
c.	$-x^2 + 7x - 10 = 0$			
d.	$x^2 - 2x + 1 = 0$			
e.	$x^2 + x + 1 = 0$			
f.	$x^2 - 4x + 4 = 0$			
g.	$2x - 3 = 1 - 2x + x^2$			
h.	$x^2 + (7 - x)^2 = 25$			
i.	$7x^2 + 21x - 28 = 0$			

21. Representar gráficamente las siguientes ecuaciones de segundo grado.

Orden	Ecuación	Gráfica
a.	$x^2 - 12x + 32 = 0$	
b.	$-4x^2 + 3x = 0$	
c.	$\frac{1}{2}x^2 + 3 = 0$	
d.	$-2x^2 + 3x - 5 = 0$	
e.	$-x^2 + 8x - 12 = 0$	
f.	$-x^2 + 4x + 5 = 0$	
g.	$5x^2 + 10x - 15 = 0$	
h.	$x^2 - 2x + 3 = 0$	
i.	$-2x^2 + 3 = 0$	

Autoevaluación

1) Dada la ecuación $6x^2 - 30x + 60 = 0$, sus raíces son:

A) $x_1 = 3;\ x_2 = 2$	**B)** $x_1 = -3;\ x_2 = -2$	**C) No tiene solución en R**

2) Dada la ecuación $4x^2 - 14x + 6 = 0$, sus raíces son:

A) $x_1 = 6;\ x_2 = 4$	**B)** $x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 3$	**C) No tiene solución en R**

3) Dada la ecuación $3x^2 - 12 = 0$, sus raíces son:

A) $x_1 = 2;\ x_2 = -2$	**B)** $x_1 = 2\ x_2 = 2$	**C) No tiene solución en R**

4) Dada la ecuación $\frac{5x-1}{4} = \frac{-3x-3}{4}$, su/s raíz/raíces es/son:

A) $x = \frac{1}{4}$	**B)** $x_1 = -1;\ x_2 = \frac{3}{2}$	**C)** $x = -\frac{1}{4}$

5) Dada la ecuación $-3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$, su discriminante es:

A) 8	**B)** 0	**C)** $x = -8$

6) Dada la ecuación $-x^2 - 5x + 1$, el carácter de sus raíces es:

A) Dos raíces reales iguales	**B) Dos raíces reales distintas**	**C) Dos raíces complejas conjugadas**

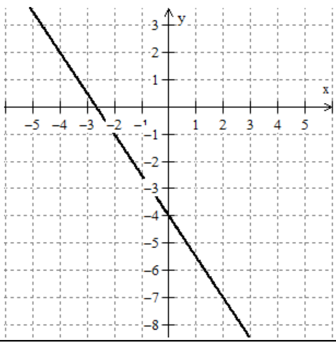
7) Dado el sistema $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$ su solución es:

A) $x = -2; y = 3$	**B)** $x = 3; y = 2$	**C)** $x = 3; y = -2$

8) Dado el sistema $\begin{cases} \frac{1}{5}x - 2y = 10 \\ 3x - \frac{3}{2}y = 36 \end{cases}$ su solución es:

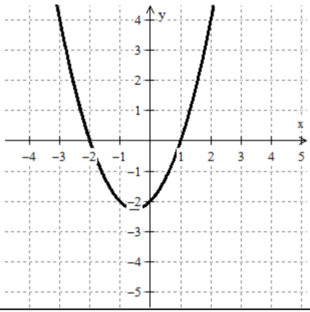
A) $x = -10; y = -4$	**B)** $x = 10; y = -4$	**C)** $x = 10; y = 4$

9) La siguiente gráfica corresponde a la ecuación:



A) $y = 3x - 4$	**B)** $y = \frac{3}{2}x - 4$	**C)** $y = -\frac{3}{2}x - 4$

10) La siguiente gráfica corresponde a la ecuación:



A) $y = x^2 + x - 2$	**B)** $y = x^2 - x + 2$	**C)** $y = x^2 - x - 2$

2025

Guía de Aprendizaje de Trigonometría

Lic. Esp. Fernando Javier Quiroga Villegas

Guía de Aprendizaje de Trigonometría

EDICIÓN DIGITAL

Villa Mercedes - San Luis, Republica Argentina, diciembre 2025.

Guía de Aprendizaje de Trigonometría

EDICIÓN DIGITAL

Lic. Esp. Fernando Javier Quiroga Villegas

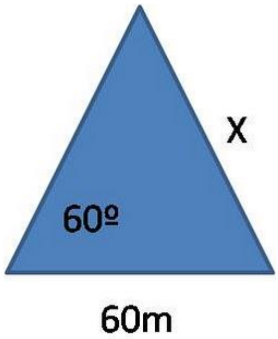
Fernando Javier Quiroga Villegas, docente efectivo de la Universidad Nacional de San Luis de la asignatura Matemática para las carreras de Técnico Universitario en Mantenimiento Industrial, Licenciatura en Bromatología de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias y de Técnico Universitario en Gestión Financiera de la Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales de la Universidad Nacional de San Luis.

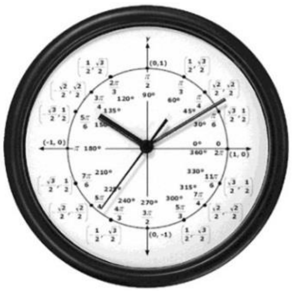
Contenido

Introducción

Iniciamos un nuevo capítulo y te proponemos comenzar este recorrido leyendo la reseña ubicada como carátula de este módulo. En ella se sintetizan los comienzos en los estudios de la trigonometría, a partir de distintos problemas de la vida real. Esta rama de las matemáticas se encarga de analizar las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, las propiedades y las distintas aplicaciones de las funciones trigonométricas.

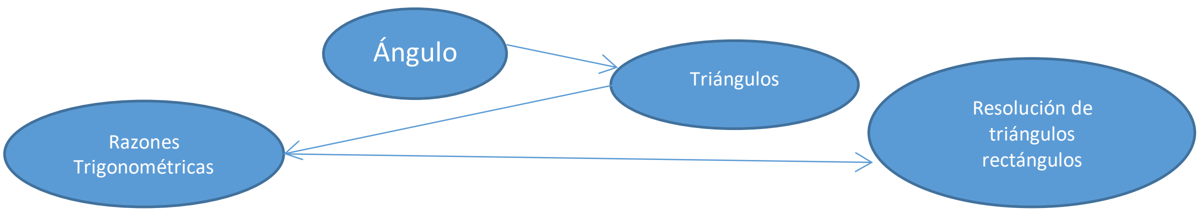
Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en el campo de la navegación, la geodesia[1] y la astronomía[2]. El principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa. Otras aplicaciones de la trigonometría se pueden encontrar en la física, química y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el sonido o el flujo de corriente alterna.





Para esta unidad nos fue muy difícil seleccionar los temas a tratar, por la variedad y cantidad de contenidos que serán de mucha utilidad para el estudio de funciones trigonométricas. Hemos optado por refrescar los conocimientos ya adquiridos en el nivel medio, y por ello, nos iniciaremos repasando algunos conceptos como los de ángulos y triángulos. Seguramente no todos los temas son nuevos para Usted.

Sin embargo, decidimos dedicarles un tiempo de este Curso. Cuando finalicemos el Módulo, nos dará la razón del por qué les dimos cierta importancia. ¿Sabían ustedes que lo más difícil cuando escribimos un texto, es decidir cómo empezar? Pero ya está hecha la elección. Comenzamos presentando, en un simple diagrama, cuál es el itinerario de aprendizajes propuesto para esta unidad.



[1] Ciencia matemática que tiene por objeto determinar la figura y magnitud del globo terrestre o de gran parte de él, y construir los mapas correspondientes.
[2] Ciencia que trata de cuanto se refiere a los astros, y principalmente a las leyes de sus movimientos.

Ángulo

Situaciones para empezar

Situación 1

Comencemos recordando el concepto de punto, al que definiremos como un elemento geométrico adimensional (o sea, sin dimensiones) que describe una posición en el espacio y que generalmente es representado por un círculo pequeño. Pero alguna vez se ha preguntado ¿Cuán pequeño es un círculo para ser considerado un punto?, ¿La marca de la punta de un lápiz sobre la hoja, es un punto?, ¿Por qué a veces trazamos o dibujamos a un punto marcando una “equis”? Todas ellas son representaciones del mismo concepto.

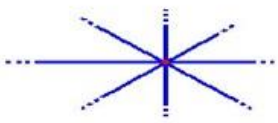
Los conceptos punto, rectas semirrectas, números, etc.; son representaciones creadas por el hombre y que consideraremos como objetos matemáticos. Estos objetos matemáticos constituyen ideas, objetos abstractos, intangibles, es decir, son objetos que no podemos ver porque son conceptos ideales, sólo están en nuestra mente y son creaciones realizadas por el hombre para representar, explicar y describir el mundo que nos rodea.

Situación 2

La recta es una sucesión infinita de puntos continuos.
El siguiente dibujo representa un trozo de una recta.

De esta representación podemos observar que:

- Una recta tiene infinitos puntos. Por lo tanto, no es posible representarla en su totalidad.
- Representamos una parte y la simbolizamos con puntos lo más continuos posible.
- Por un punto cualquiera de la recta pasa otras infinitas rectas. Por lo tanto, es imposible representarlas a todas.
- Sin embargo, por dos puntos pasa una y solo una recta. Por lo tanto, dos puntos determinan una y solo una recta.



Podemos concluir que:

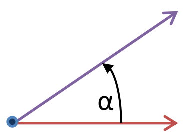
- Si conocemos un solo punto de una recta no es posible trazarla.
- Si conocemos dos puntos de una recta esta nos queda determinada y podemos trazarla.

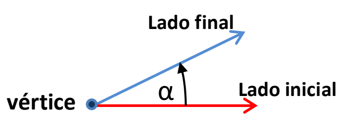
Situación 3

Podemos definir una semirrecta como una recta que tiene principio, pero no tiene fin, o como una recta con un extremo determinado por un punto dado.
Un punto determinado sobre una recta la divide en dos semirrectas. A este punto se le denomina origen de la semirrecta.

Llamamos segmento de recta a la porción de una recta que está limitada por dos puntos
puntos se le llama extremos.

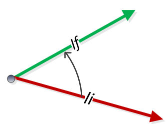
Ahora estamos en condiciones de definir un ángulo:



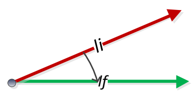


Es la abertura formada por la unión de 2 semirrectas en un mismo punto llamado *vértice*; las semirrectas reciben el nombre de *lados del ángulo*.

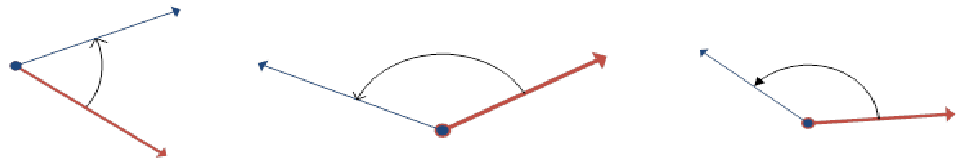
- Distinguimos de esta figura el punto en común entre ambas semirrectas al que denominamos **vértice**.
- El ángulo se obtiene al rotar una semirrecta alrededor de su origen.
- La posición original de la semirrecta se denomina ***lado inicial*** (extremo fijo de la semirrecta) y la posición final se denomina *lado terminal o* ***lado final***.



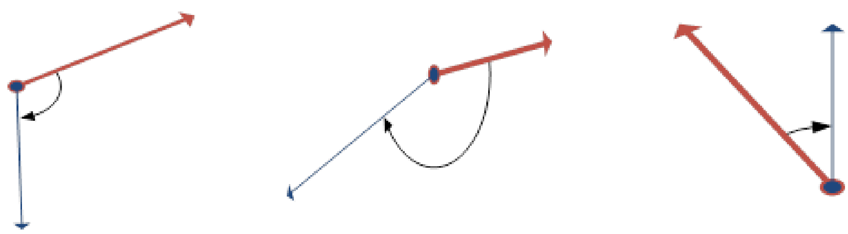
La rotación del ángulo se puede efectuar en 2 sentidos; en el sentido contrario a las agujas del reloj, en este caso el ángulo es ***positivo*** y girando en el sentido de las agujas del reloj el ángulo es ***negativo***. En caso de no existir rotación en un sentido o en el contrario estamos frente a un ángulo nulo.



Son ángulos positivos



Son ángulos negativos



Actividades de Comprensión

Actividad Nº 1

1. ¿Qué elemento geométrico definimos en la situación 1?
2. ¿Qué elemento geométrico definimos en la situación 2?.
3. ¿Se pueden establecer la cantidad de puntos que representan una recta?.
4. ¿Cuántas rectas pasan por un punto?.
5. ¿Cuántos puntos determinan un recta?.
6. ¿A qué definimos como semirrecta?.
7. Defina segmento de una recta.
8. Defina ángulo.

Actividad Nº 2

1. Trace una recta sobre ella identifique:
   a) Un punto,
   b) una semirrecta,
   c) una segmento.
2. Si trazamos tres puntos alineados, ¿Podemos determinar una única recta?.
3. Si trazamos tres puntos no alineados, ¿Podemos determinar una única recta?.
4. Dibuje dos semirrectas unidas por un punto e identifique:
   a) Vértice,
   b) Lado inicial,
   c) Lado final,
   d) Indique el sentido del ángulo que forma entre el extremo inicial y final.
5. Dibuje dos semirrectas unidas por un punto en el cual el lado inicial coincide con el lado final. ¿Se puede determinar el sentido del ángulo formado?.

Vamos a realizar nuestra primera Pausa de Recapitulación.

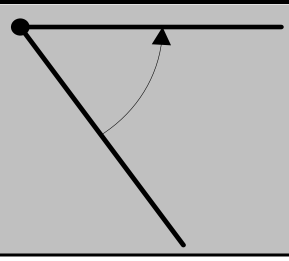
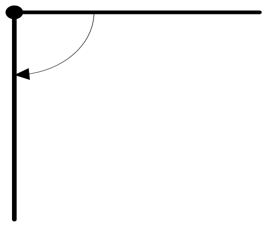
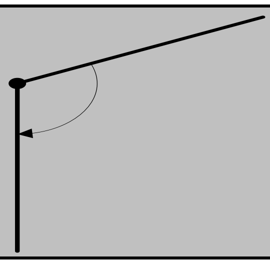
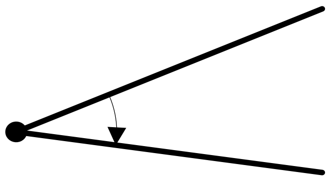
Pausa de Recapitulación

¡Pare! 

- Construya un glosario[3] con los siguientes conceptos:
  - Punto
  - Recta
  - Semirrecta
  - Segmento
  - Ángulo
  - Rotación del ángulo
  - Ángulo nulo

 **Actividades de Producción**

1. Indicar si los siguientes ángulos giran en sentido positivo o negativo.

Orden	Ángulo	Sentido
a.		
b.		
c.		
d.		

Medición de ángulos

Situaciones para empezar

Situación 1

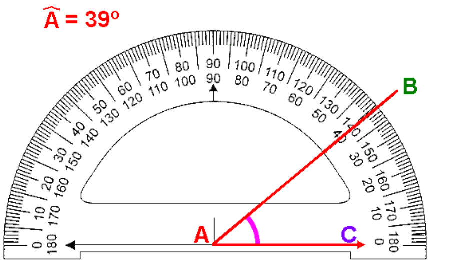
Si el lado inicial de un ángulo es coincidente con el lado final del mismo podemos afirmar que la abertura formada por la unión de las dos semirrectas es nula. Por lo tanto, la rotación del ángulo no es positiva ni negativa.

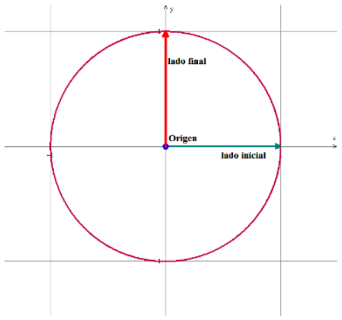
Lado inicial es coincidente con Lado final

Situación 2

[3] Catálogo de palabras con definición o explicación de cada una de ellas.

Existen varios utensilios para la medición de ángulos el más reconocido en la actualidad es el transportador. Otros instrumentos son: el goniómetro[4], el cuadrante[5], el sextante[6], entre otros. El transportador es un medio círculo graduado con doble escala, una de 0º a 180º y la otra de 180º a 0º. Para medir un ángulo, se coloca el punto central del transportador sobre el vértice del ángulo y uno de sus lados debe coincidir con la línea del cero.





Situación 3

Los sistemas de medición de ángulos establecen una unidad de medida que permite establecer la magnitud de la abertura originada por el desplazamiento de la semirrecta fija o lado inicial y el lado final. Los ángulos se pueden medir utilizando sistemas de medición como los siguientes: Sistema centesimal, **sistema sexagesimal** y el **sistema radial** (reconocido también como sistema internacional o circular). En este Curso adoptaremos los dos últimos. Para interpretar los distintos sistemas de medición recurriremos a la circunferencia trigonométrica.
Llamamos circunferencia trigonométrica o circunferencia unidad a aquella cuyo radio es 1 y su centro lo ubicaremos en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas.
Al considerar el radio de una unidad nos facilitara comprender distintas razones de un ángulo cualquiera.
Ahora estamos en condiciones de avanzar sobre las siguientes definiciones:

Sistemas de medición de ángulos

Grado sexagesimal es la amplitud del ángulo resultante de dividir la circunferencia en 360 partes iguales.

Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma por unidad de medida. Para medir los ángulos existen varios sistemas, siendo los más conocidos el sistema sexagesimal y el circular.

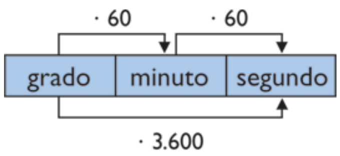
- ***Sistema Sexagesimal***: en este sistema la *unidad de medida* es el ***grado sexagesimal*** que corresponde a dividir la circunferencia en 360 partes iguales que se abrevia **1°**; éste a su vez se divide en 60 partes iguales y 1°/60 corresponde a un *minuto sexagesimal* que se abrevia **1´**; éste a su vez se divide en 60 partes iguales y 1´/60 corresponde a un *segundo sexagesimal* que se abrevia **1"**.

---

[4] Un goniómetro es un instrumento de medición con forma de semicírculo o círculo graduado en 180º o 360º, utilizado para medir o construir ángulos.

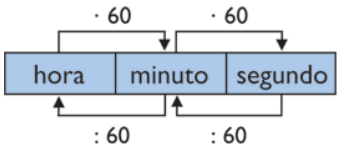
[5] El cuadrante es un antiguo instrumento utilizado para medir ángulos en astronomía y navegación. Se llama cuadrante porque consiste en una placa metálica con forma de cuarto de círculo.

[6] El sextante es un instrumento que permite medir ángulos entre dos objetos tales como dos puntos de una costa o un astro tradicionalmente, el Sol y el horizonte.



1° = 60' = 3600'' Un grado sexagesimal tiene 60 minutos: 1° = 60'; 1º=3600''

1' = 60'' Un minuto sexagesimal tiene 60 segundos: 1' = 60''.



Entonces:

- Un ángulo de 35º 60' equivale a 2160' y a 129600''. Para convertir a minutos multiplicamos los 35º por 60 y obtenemos 2100' adicionamos los 60' y llegamos a 2160'. Para convertir a segundos a 35º los multiplicamos por 60, al resultado obtenido lo multiplicamos por 60 y obtenemos 126000'', nos falta convertir los 60', para ello multiplicamos 60' por 60 y obtenemos 3600'' que debemos adicionar obteniendo así los 129600''.
- Un ángulo de 90º equivale a 5400' y a 324000''.
- Un ángulo de 235º equivale a 14100' y a 846000''.
- 7216' equivalen a 120º 16'. Para convertir de minutos a grados dividimos por 60 y obtenemos así 120 y un resto de 16. La parte entera nos indica los grados, 120º y a la parte decimal indica los minutos 16'.
- Cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60º. Si lo deseamos convertir a minutos debemos multiplicar el valor dado por 60.
- Para indicar que un ángulo mide 30 grados 10 minutos, 50 segundos, escribimos 30º 10' 50''.

Recordemos:

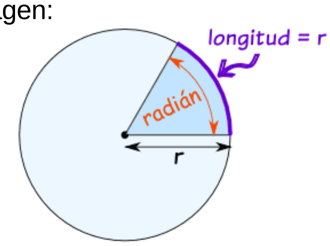
- **Para pasar de grados a minutos debemos multiplicar por 60.**
- **Para pasar de minutos a grados debemos dividir por 60.**
- **Para pasar de grados a segundos debemos multiplicar por 3600.**
- **Para pasar de segundos a grados debemos dividir por 3600.**

Sistema Circular

En el sistema circular la unidad de medida es el ***radian***.

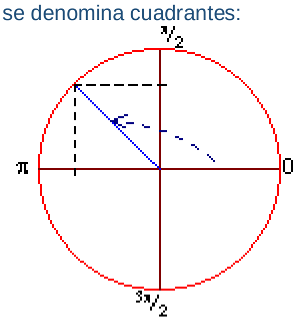
El radian es un ángulo central que tiene como lados 2 radios de una circunferencia, cuyo arco es igual al radio de la circunferencia al cual pertenece.

Observemos la siguiente imagen:



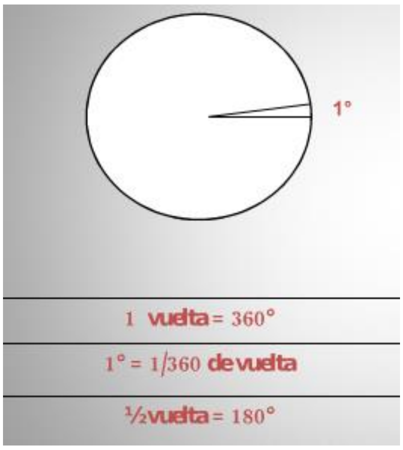
- **r** representa el radio de la circunferencia trigonométrica.
- La longitud de **r** es 1.
- La longitud de r se mide desde el origen o centro de la circunferencia a cualquier punto que pertenece a la circunferencia.
- 1 **radián** es el **arco de la circunferencia** que es igual al radio de la circunferencia.

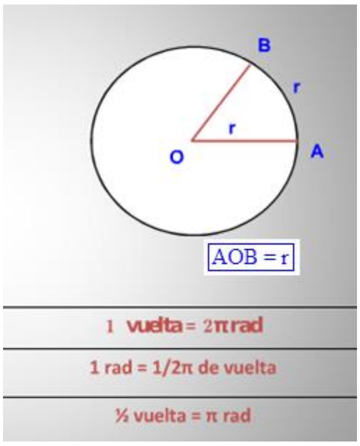
La circunferencia trigonométrica queda dividida en cuatro partes iguales de 90º ($\frac{\pi}{2}$) cada una, que va desde 0º hasta 360º (2π), a las que se denomina cuadrantes:



1er cuadrante: 0º a 90º
2do cuadrante: 90º a 180º
3er cuadrante: 180º a 270º
4to cuadrante: 270 a 360º

- Un **radián** representa en grados sexagesimales mide **aproximadamente 57º** (57,2658… grados).
- En general, cuando se dice que un ángulo es igual a n-radianes, se quiere expresar con ello que es el ángulo central que corresponde a un **arco de n radianes**.
- Como la circunferencia tiene una longitud $2.\pi.r$, resulta que la longitud de la circunferencia expresada, en radianes es igual a 2π, o sea:
    - longitud circunferencia = 2π radianes
    - el ángulo central total, o sea el ángulo de 360º es igual a 2π ángulos de 1 radián.





Actividades de Comprensión

Actividad Nº 3

1. Analice la Situación 1. Defina ángulo nulo.
2. ¿Cuáles son los sistemas de medición de ángulos que utilizaremos en este Curso?.
3. ¿A qué llamamos circunferencia trigonométrica?.
4. ¿Qué entendemos por medir un ángulo?.
5. ¿Cuál es la unidad de medida del sistema sexagesimal?.
6. ¿A cuántos minutos equivale 1º?.
7. ¿A cuántos segundos equivale 1º?.
8. Transcriba lo considerado en el apartado Recordemos.
9. ¿Cuál es la unidad de medida del sistema circular?.
10. ¿A cuánto equivale un radian en grados sexagesimales?.
11. ¿A cuánto equivale la longitud de la circunferencia expresada en en radianes?.
12. Un ángulo de 360º, ¿A cuántos radianes equivale?.

Actividad Nº 4

1. Construya una circunferencia de radio 1 y determine:
    a. El centro,
    b. Longitud del radio,
    c. Trace dos segmentos desde el centro a dos puntos de la circunferencia,
    d. Compare la longitud del arco formado entre los extremos de cada segmento dibujado. ¿El ángulo formado es menor, mayor o igual a 1 radián?
2. Trace la circunferencia unidad en un sistema de ejes coordenados, y determine:
    a. Longitud de la circunferencia en grados sexagesimales y en radianes.
    b. Longitud de la circunferencia hasta el 1º cuadrante.
    c. Longitud de la circunferencia hasta el 2º cuadrante.
    d. Longitud de la circunferencia hasta el 3º cuadrante.
    e. Longitud de la circunferencia hasta el 4º cuadrante.
    f. Dibujar un ángulo de 57º aproximadamente y comparar con un 1 radián.
    g. Dibujar un ángulo de 2π radianes e indique a cuántos grados sexagesimales corresponde.
    h. Dibujar un ángulo de $3/_4\,\pi$ radianes e indique a cuántos grados sexagesimales corresponde.

i. Dibujar un ángulo de $^1/_4\,\pi$ radianes e indique a cuántos grados sexagesimales corresponde.

Actividades de Producción

2. Completar el siguiente cuadro.

Orden	Grados	Minutos	Segundos
a.	35º		
b.		2500’	
c.			5200’’
d.	125º		
e.		1890’	
f.		36000’	
g.			125300’’
h.	275º		
i.			524000’’

Conversión entre sistemas de medición

Para encontrar la relación entre los sistemas sexagesimal y circular, utilizaremos la regla de tres simple a partir de la siguiente relación:

Recuerde: π es un número irracional.

π equivale aproximadamente a: 3,14159…

π radianes equivalen a 180°.

$$180º \longrightarrow \pi \text{ radianes}$$

Ejemplo:

- ¿A cuánto equivale 360º en radianes?:

$$\begin{array}{lcl} 180º & \longrightarrow & \pi \text{ radianes} \\ 360º & \longrightarrow & x \text{ radianes} \end{array}$$

x radianes = $\dfrac{360^\circ.\pi\text{ radianes}}{180^\circ} = 2\pi$ radianes

- ¿A cuánto equivale 270º en radianes?:

$$\begin{array}{lcl} 180º & \longrightarrow & \pi \text{ radianes} \\ 270º & \longrightarrow & x \text{ radianes} \end{array}$$

x radianes = $\dfrac{270^\circ.\pi\text{ radianes}}{180^\circ} = \dfrac{3\pi}{2}$ radianes

Adoptando como unidad el radián, resultan las siguientes medidas para los arcos que se detallan a continuación:

- Circunferencia = 2π
- semicircunferencia = π
- cuadrante = $\frac{\pi}{2}$

- ¿A cuánto equivale 45º en radianes?:

$$\begin{array}{lcl} 180º & \longrightarrow & \pi \text{ radianes} \\ 45º & \longrightarrow & x \text{ radianes} \end{array}$$

x radianes = $\dfrac{45^\circ.\pi\text{ radianes}}{180^\circ} = \dfrac{1.\pi}{4}$ radianes

- ¿A cuánto equivale $\frac{1}{5}\pi$ radianes en grados?:

$$\begin{array}{lcl} 180º & \longrightarrow & \pi \text{ radianes} \\ x^\circ & \longrightarrow & \frac{1}{5}\pi \text{ radianes} \end{array}$$

$$x^\circ = \frac{\frac{1}{5}\pi\text{ radianes}\,.\,180^\circ}{\pi\text{ radianes}} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

- ¿A cuánto equivale $\frac{6}{4}\pi$ radianes en grados?:

$$\begin{array}{lcl} 180º & \longrightarrow & \pi \text{ radianes} \\ xº & \longrightarrow & \frac{6}{4}\pi \text{ radianes} \end{array}$$

$$xº = \frac{\frac{6}{4}\pi\text{ radianes}\,.\,180^\circ}{\pi\text{ radianes}} = \frac{6.180^\circ}{4} = 270^\circ$$

- ¿A cuánto equivale $\frac{9}{2}\pi$ radianes en grados?:

180º $\longrightarrow$	π radianes
$x^{º}$ $\longrightarrow$	$\frac{9}{2}\pi$ radianes

$$x^{º} = \frac{\frac{9}{2}\pi \text{ radianes} \,.\, 180^{º}}{\pi \text{ radianes}} = \frac{9.180^{º}}{2} = 810^{º}$$

La tabla muestra la conversión de los ángulos más comunes.

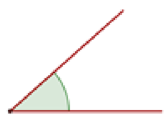
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Clasificación de los ángulos según su medida

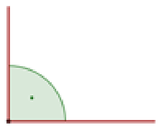
Ejemplo:

- Si $\alpha = 36º$, entonces α es un ángulo agudo.
- Si $\alpha = 96º$, entonces α es un ángulo obtuso.
- Si $\alpha = 180º$, entonces α es un ángulo llano.

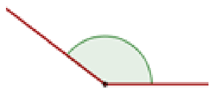
Agudo < 90°



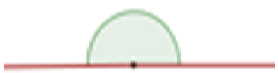
Recto = 90°



Obtuso > 90°

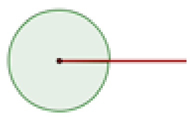


Llano = 180°



Nulo = 0º

Completo = 360°



- Un ángulo es agudo si mide menos de 90°.
- Un ángulo es recto si mide 90°.
- Un ángulo es obtuso si mide más de 90°
- Un ángulo es llano si mide 180°.
- Un ángulo es nulo si mide 0°.
- Un ángulo se dice completo si mide 360°.

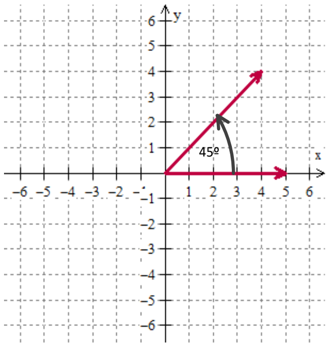
Otras consideraciones sobre ángulos

Un ángulo esta en posición normal o estándar, si su vértice se encuentra en el origen de un sistema rectangular de coordenadas cartesianas y su lado inicial coincide con el eje positivo $\vec{x}$.

A lo largo de esta guía trabajaremos con ángulos cuyos vértices se encuentran en el origen de un sistema de coordenadas cartesianos, por ello vamos a definirlos.

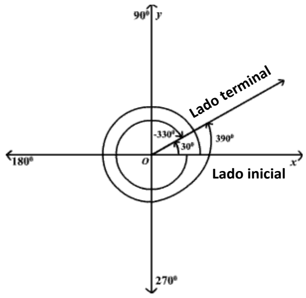
- El sistema de coordenadas se divide en 4 cuadrantes.

- Se dice que el ángulo esta en cierto cuadrante , si su lado terminal se encuentra en dicho cuadrante.
- Si el lado terminal coincide con alguno de los ejes de coordenados, entonces se trata de un ángulo cuadrantal.



Como podemos observar el ángulo queda determinado por el lado final.
Otro tema que analizaremos, es el siguiente:

Si dos ángulos tienen el mismo lago inicial y el mismo lado terminal, se denominan coterminales.



Como podemos observar una forma de determinar un ángulo coterminal es adicionar 360º al ángulo original. En nuestra imagen el ángulo mide 30º y un ángulo coterminal mide 30º + 360º = 390º. De hecho, para encontrar cualquier ángulo coterminal podemos multiplicar a 360º por cualquier número entero y sumarlo al ángulo original. La siguiente expresión nos ayuda a obtener los ángulos coterminales positivos y negativos de un ángulo dado:

$$\beta = \alpha + 360^{\circ}k \qquad \text{con} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \text{ ó } k \in \mathbb{Z}$$

Un ángulo coterminal al ángulo de 30º pero negativo lo podemos obtener restando 360º. En nuestro caso es 30º - 360º = -330º.


Actividades de Comprensión

Actividad Nº 5

1. Convertir los ángulos del ejemplo anterior al sistema circular.
2. Complete el cuadro de clasificación de ángulos incorporando los valores correspondiente de los ángulos en sistema circular.

Actividad Nº 6

1. Encontrar 5 ángulos positivos y 5 negativos coterminales con 210º.
2. Determinar en grados y radianes los ángulos cuadrantales.
3. Dibuje un ángulo de 90° y un ángulo de -270°. ¿Son iguales?.

¡Pare!

Vamos a realizar nuestra segunda Pausa de Recapitulación.

Pausa de Recapitulación

- Sumamos a nuestro glosario los siguientes conceptos:
  - Sistema sexagesimal
  - Sistema circular
  - Grado sexagesimal
  - Minuto sexagesimal
  - Segundo Sexagesimal
  - Radian
  - Angulo agudo
  - Angulo recto
  - Angulo obtuso
  - Angulo llano

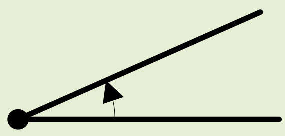
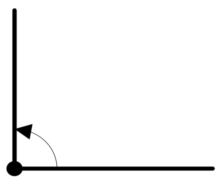
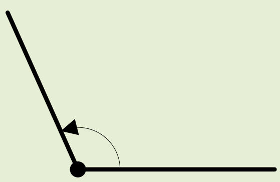
- Angulo nulo
- Angulo completo
- Longitud total de la circunferencia en grado y en radianes.
- Relación para convertir grados en radianes.
- Angulo en posición normal
- Angulos coterminales
- Angulos cuadrantales
- Expresión para la obtención de ángulos coterminales.

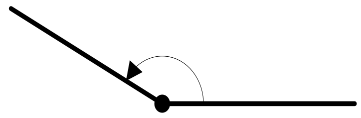
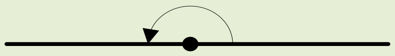
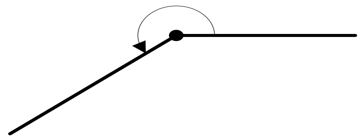
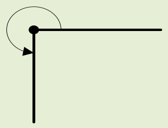
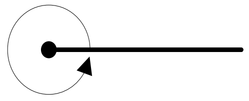
Actividades de Producción

3. Completar el siguiente cuadro.

Orden	Grados	Radianes
a.	250º	
b.		$\frac{3\pi}{4}$
c.		$\frac{\pi}{6}$
d.	350º	
e.	160º	
f.		$\frac{7\pi}{5}$
g.	45º	
h.		$\frac{\pi}{3}$
i.		$\frac{5\pi}{4}$
j.	0°	
k.		$\frac{\pi}{9}$
l.	540°	
m.		2π
n.	210°	
o.	125°	
p.		$\frac{4\pi}{3}$

4. Clasificar los siguientes ángulos según su medida.

Orden	Ángulo	Tipo
a.		
b.		
c.		

d.		
e.		
f.		
g.		
h.		

Cierre del módulo

Si ha logrado comprender los conceptos analizados en este módulo, avance al siguiente. Continuamos…

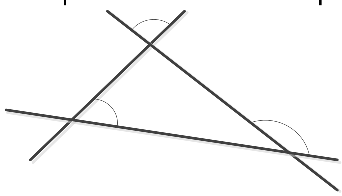
Triángulos

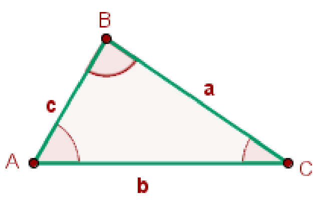
Iniciamos un nuevo recorrido. Ahora daremos tratamiento al tema Triángulos. Comencemos definiéndolos.

Un triángulo es un polígono de tres lados.

Un triángulo está determinado por:

- Tres segmentos de recta que se denominan lados.
- Tres puntos no alineados que se llaman vértices.

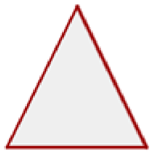
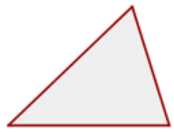




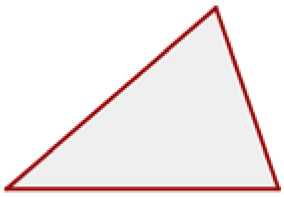
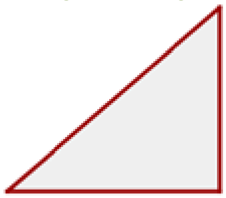
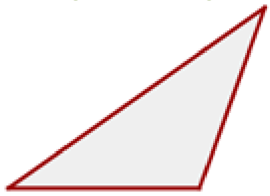
- ✓ Los vértices se escriben con letras mayúsculas.
- ✓ Los lados se escriben en minúscula, con las mismas letras de los vértices opuestos. *En algunas ocasiones utilizaremos letras del alfabeto griego para nombrar a los ángulos de un triángulo.*

Clasificación de triángulos

Según sus lados

Triángulo equilátero	Triángulo isósceles	Triángulo escaleno
		
Tres lados iguales.	Dos lados iguales.	Tres lados desiguales.

Según sus ángulos

Triángulo acutángulo	Triángulo rectángulo	Triángulo obtusángulo
		
Tres ángulos agudos	Un ángulo recto (90º) El lado mayor es la hipotenusa. Los lados menores son los catetos.	Un ángulo obtuso.

Propiedades de los triángulos

Analicemos algunas de las propiedades de los triángulos que nos serán de utilidad para resolver problemas de la vida real.
Continuemos…

1-Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

2-La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

De la propiedad 1 se derivan la siguiente definición:

Un triángulo es rectángulo, acutángulo u obtusángulo, cuando el cuadrado del lado mayor es igual, menor o mayor que la suma de los cuadrados de los otros lados.

La propiedad 2 determina la siguiente igualdad:

$$A + B + C = 180^o$$

Debemos tener en cuenta que si el triángulo es rectángulo y A corresponde al ángulo recto se verifica:

$$B + C = 90$$

Si el triángulo es equilátero cada uno de sus ángulos verifica:

$$A = 60^o$$
$$B = 60^o$$
$$C = 60^o$$

Ejemplo:

Analicemos las siguientes situaciones

Situación 1

- Las siguientes desigualdades correspondientes a los lados de un triángulo se verifican:
  $a \leq b + c$ y $a \geq b - c$
  $b \leq a + c$ y $b \geq a - c$
  $c \leq a + b$ y $c \geq a - b$

Si los lados de un triángulo miden **a** = 50 cm, **b** = 40 cm y **c** = 8 cm.
El cuadrado del lado mayor:

$$a^2 = 50^2 = 2500$$

El cuadrado de los otros lados:

$$b^2 = 40^2 = 1600$$
$$c^2 = 30^2 = 900$$
$$b^2 + c^2 = 2500$$

Vemos que se cumple $a^2 = b^2 + c^2$ entonces estos lados corresponden a un triángulo rectángulo.

Situación 2

Si los lados de un triángulo valen **a** = 12 cm; **b** = 10 cm y **c** = 8 cm.

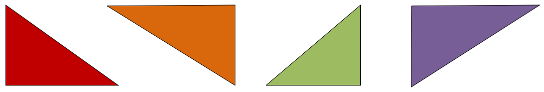
El cuadrado del mayor es $a^2 = 12^2 = 144$.
Cuadrado de los otros dos lados:

$$b^2 = 10^2 = 100$$
$$c^2 = 8^2 = 64$$
$$b^2 + c^2 = 164$$

Vemos que se cumple $a^2 < b^2 + c^2$ entonces corresponde a un triángulo acutángulo.

Triángulos rectángulos

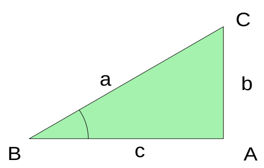
Un triángulo es rectángulo cuando uno de sus ángulos es recto, esto es, mide 90º. El lado mayor de un triángulo rectángulo se llama hipotenusa mientras que los otros dos lados se llaman catetos.



Recuerda que, en cualquier triángulo, la suma de las medidas de los tres ángulos vale 180º. Por tanto, en cualquier triángulo rectángulo, la suma de los dos ángulos agudos restantes suma 90º.

Teorema de Pitágoras

- Este teorema, enunciado por el matemático griego Pitágoras en el siglo V a.C., es uno de los resultados más conocidos e importantes de la geometría y posee gran cantidad de aplicaciones tanto en distintas partes de las matemáticas como en situaciones de la vida diaria.



$a^2 = b^2 + c^2$

El teorema se aplica a los triángulos rectángulos, y dice lo siguiente:

"En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

- Si llamamos "a" a la hipotenusa de un triángulo rectángulo y "b", "c" a los catetos $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$

A los grupos de tres números "a", "b" y "c" que verifican $a^2 = b^2 + c^2$ se les llama "ternas pitagóricas".

Analicemos las siguientes situaciones.

Situación 1

- Se conoce de un triángulo rectángulo el valor de dos de sus lados b = 7 cm y c = 3 cm. ¿Cuál es el valor de la hipotenusa?

  El valor de la hipotenusa es:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 56$$
$$a = \sqrt{56} = 7{,}483$$

  Rta: El valor de la hipotenusa es de 7,483 cm.

Situación 2

- Se conoce de un triángulo rectángulo el valor de la hipotenusa 5 cm y de uno de sus lados b = 2 cm. ¿Cuál es el valor del lado faltante?

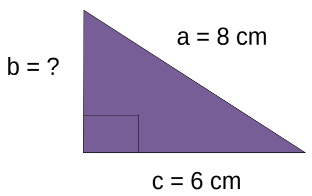
  Utilizamos el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$5^2 = 2^2 + c^2$$
$$c^2 = 5^2 - 2^2$$
$$c = \sqrt{21} = 4{,}58$$

  Rta: El lado c mide 4,58 cm.

Situación 3

- Con los siguientes datos calcular el lado faltante:



  Utilizamos el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$8^2 = b^2 + 6^2 =$$
$$b^2 = 8^2 - 6^2$$
$$b = \sqrt{29} = 5{,}38$$

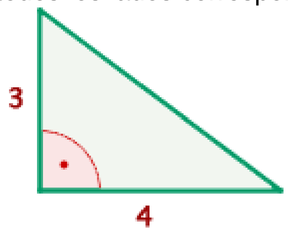
Rta: El lado b mide 5,38 cm.

Actividades de Comprensión

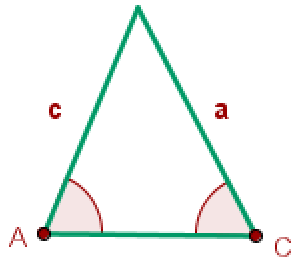
1. ¿Qué es un triángulo?
2. ¿Cómo queda determinado un triángulo?
3. ¿Cuáles son los tipos de ángulos de un triángulo?
4. Dibuje un triángulo y denote todos sus elementos.
5. ¿Cómo se clasifican los triángulos según sus lados?
6. ¿Cómo se clasifican los triángulos según sus ángulos?
7. Liste las propiedades enunciadas de los triángulos. Dar un ejemplo de cada una.
8. ¿A cuánto equivale la suma de los ángulos interiores de un triángulo?
9. Dado un triángulo rectángulo, ¿Se puede determinar el valor de cada uno de sus ángulos interiores? De un ejemplo gráfico y denote todos sus elementos.
10. En el apartado correspondiente al análisis de las propiedades de los triángulos se proponen dos situaciones. ¿Se anima a proponer una tercera situación que refleje el análisis faltante?
11. Confeccione un listado de consideraciones para tener en cuenta sobre triángulos rectángulos.
12. ¿Qué expresa el Teorema de Pitágoras?

Actividad Nº 8

1. Complete los datos de todos los lados correspondientes a la imagen siguiente:



2. Dada la siguiente imagen. Clasifique según sus lados y según sus ángulos. Indique el valor de cada ángulo.



Pausa de Recapitulación

¡Pare!

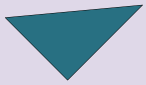
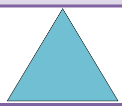
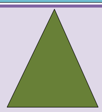
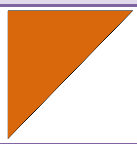
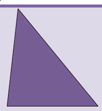
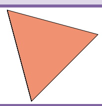
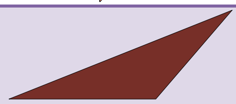
Vamos a realizar otra Pausa de Recapitulación.

- Sumamos a nuestro glosario los siguientes conceptos:
  - Triángulo.
  - Triángulo equilátero.
  - Triángulo isóceles.
  - Triángulo escaleno.
  - Triángulo acutángulo.
  - Triángulo rectángulo.
  - Triángulo obtusángulo.
  - Propiedad de los lados de un triángulo.
  - Propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
  - Hipotenusa.
  - Teorema de Pitágoras.

Actividades de Producción

5. Clasificar los siguientes triángulos según sus ángulos.

Orden	Triángulo	Según sus ángulos

a.		
b.		
c.		
d.		
e.		
f.		
g.		

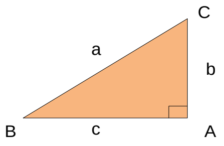
6. Con los siguientes datos de un triángulo rectángulo aplicar el Teorema de Pitágoras.

Orden	a	b	c
a.	9 cm	7cm	
b.		9 cm	10 cm
c.	7,8 cm		3,4 cm
d.	12 m	10,5 m	
e.		22 m	14 m
f.	17 cm		6 cm
g.		15 cm	7 cm
h.	11m	4 m	
i.		2 cm	3 cm

Cierre del módulo

Si ha logrado comprender los conceptos tratados en este módulo, entonces está en condiciones de avanzar.
Sigamos el recorrido…

Iniciamos un nuevo recorrido y comenzamos así:
¿Qué son las razones trigonométricas?
Hasta ahora conocemos una relación entre los lados del triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras ; y otra entre los ángulos de cualquier triángulo: su suma es 180º.
Los ángulos agudos de un triángulo se relacionan con la medida de sus lados mediante unos cocientes llamados razones trigonométricas.
Un cateto, en geometría, es cualquiera de los dos lados menores de un triángulo rectángulo, los que conforman el ángulo recto. El lado mayor lo denominamos Hipotenusa (el lado que es opuesto al ángulo recto). La denominación de catetos e hipotenusa se aplica a los lados de los triángulos rectángulos exclusivamente.
Debido a que un triángulo tiene tres lados, se pueden establecer seis razones, dos entre cada pareja de estos lados. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo son las siguientes:



$$\overset{\triangle}{ABC}\begin{cases} A \text{ ángulo rectángulo} \\ \text{B ángulo agudo} \\ \text{C ángulo agudo} \\ a\text{: hipotenusa} \\ b\text{: cateto, opuesto al } \measuredangle \text{ B} \\ c\text{: cateto, opuesto al } \measuredangle \text{ C} \end{cases}$$

En la siguiente tabla te mostramos cuáles son estas razones trigonométricas:
Seno: razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

Coseno: razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa.

Tangente: razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente.

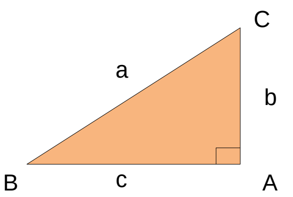
Cotangente: razón entre el cateto adyacente al ángulo y el cateto opuesto.

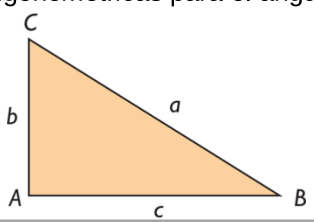
Secante: razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo.

Cosecante: razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo.

Situación 1

Calculemos las distintas razones trigonométricas para el ángulo B y C:



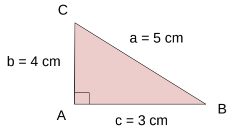


$sen\, B = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$	$sen\, C = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$
$cos\, B = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$	$cos\, C = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$
$tan\, B = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{b}{c}$	$tan\, C = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{c}{b}$
$cotan\, B = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{c}{b}$	$cotan\, C = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{b}{c}$
$sec\, B = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{a}{c}$	$sec\, C = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{a}{b}$
$cosec\, B = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{a}{b}$	$cosec\, C = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{a}{c}$

Situación 2

Calculemos las razones trigonométricas para los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ del siguiente triángulo:

$\boldsymbol{sen\, B} = \dfrac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{hipotenusa}} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$	$\boldsymbol{sen\, C} = \dfrac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{hipotenusa}} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$
$\boldsymbol{cos\, B} = \dfrac{\textbf{cateto adyacente}}{\textbf{hipotenusa}} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$	$cos\, C = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{4}{5}$
$\boldsymbol{tan\, B} = \dfrac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{cateto adyacente}} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$	$tan\, C = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{3}{4}$



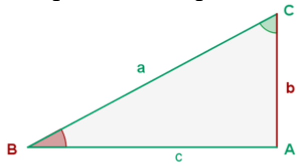
$\boldsymbol{cotan\,B} = \dfrac{\textbf{cateto adyacente}}{\textbf{cateto opuesto}} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$	$cotan\,C = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{4}{3}$
$\boldsymbol{sec\,B} = \dfrac{\textbf{hipotenusa}}{\textbf{cateto adyacente}} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$	$sec\,C = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{5}{4}$
$\boldsymbol{cosec\,B} = \dfrac{\textbf{hipotenusa}}{\textbf{cateto opuesto}} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$	$cosec\,C = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{5}{3}$

Actividades de Comprensión

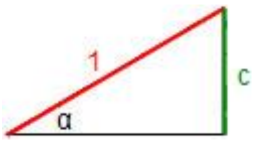
Actividad Nº 9

¿Qué son las relaciones trigonométricas? Y ¿Cuáles son?.

Confeccione un cuadro que defina las razones trigonométricas para los ángulos B y C correspondiente al triángulo rectángulo de la siguiente imagen:



Determinar las distintas razones trigonométricas para el ángulo α (letra griega alfa), con los datos de la siguiente imagen:

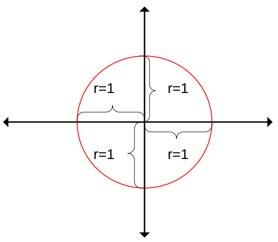


¿Qué relacón existe entre los lados de un triángulo rectángulo?.

¿Qué expresa el Teorema de Pitágoras?.

Dado un triángulo rectángulo. ¿Se pueden establecer los valores correspondientes a todos sus ángulos?.

Circunferencia trigonométrica

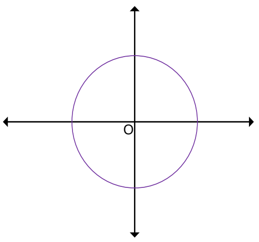


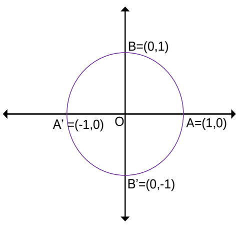
Ya hemos introducido someramente este tema. A continuación, realizaremos un desarrollo más profundo con el objeto de que identifiques la utilidad de la circunferencia trigonométrica para determinar el signo y los valores de las distintas razones trigonométricas de ángulos rectángulos.

Repasemos…

La circunferencia trigonométrica es aquella inscrita en el plano cartesiano con centro en el origen y radio igual a 1 y que nos es de utilidad para definir razones trigonométricas.

Representación





Pasos

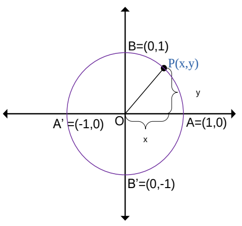
En el plano cartesiano dibujar una circunferencia de radio 1 con centro en el origen del plano cartesiano.

Identificar los vértices de la circunferencia y dar sus coordenadas. Observe que de la identificación de los vértices obtenemos que las siguientes distancias son iguales: $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OA'}| = |\overline{OB'}| = 1$

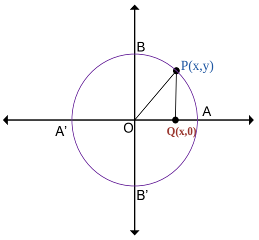
Trazar un segmento desde el origen a un punto genérico P sobre la circunferencia de coordenadas (x,y). Si analizamos la distancia de $|\overline{OP}| = 1$ dado que el punto P pertenece a la circunferencia.

Trazar un segmento paralelo al eje y de origen en P y que intercepte el eje $\vec{x}$, denominaremos al punto que se obtiene de interceptar el eje $\vec{x}$ Q, el que tendrá coordenadas (x,0). Por lo tanto, la longitud del segmento $|\overline{PQ}| = y$.

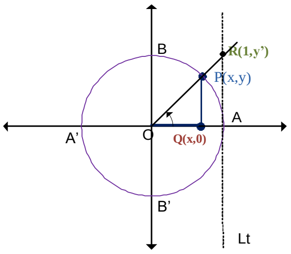
Trazamos el segmento $\overline{OQ}$ y de esta forma obtenemos el triángulo $O\overset{\Delta}{P}Q$. Identificamos de este triángulo un ángulo de lado inicial en el segmento $\overline{OQ}$ y lado final en el segmento $\overline{OP}$ que denominamos α. Recuerde que $\overline{OP} = 1$ y la longitud del segmento $|\overrightarrow{OQ}| = x$. Por



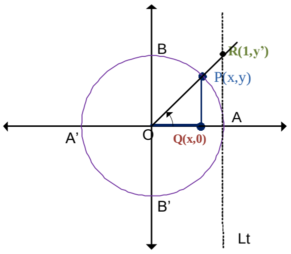
lo tanto, el ángulo α del triángulo rectángulo tiene como cateto opuesto a y, cateto adyacente a x e hipotenusa de longitud 1.
Trazamos una recta punteada paralela al eje $\vec{y}$ y que pase por el vértice A que denominamos Línea tangente. Proyectamos el segmento $\overline{OP}$ hasta que corte Lt y obtenemos el punto R. Trazamos el segmento $\overline{RA}$. Se forma el triángulo de vértices $\overset{\Delta}{ORA}$, el cual es semejante al triángulo de vértices $\overset{\Delta}{OPQ}$ dado que sus ángulos son iguales. De la circunferencia trigonométrica podemos identificar: El origen del plano cartesiano que coincide con el centro de la circunferencia que señalamos con la letra O.



Los vértices de la circunferencia A cuyas coordenadas son (1,0). Este vértice es conocido como origen de arcos.
El vértice B tiene coordenadas (0,1); es conocido como origen de complementos.
A Lt la denominaremos eje tangente.
αel ángulo de lado inicial $\overline{OQ}$ y lado final $\overline{OP}$ que se denomina arco dirigido en posición normal, en este caso es positivo.
Un punto genérico P de coordenadas (x,y).
Un segmento $\overline{OP}$ de longitud 1 que denominaremos hipotenusa del triángulo de vértices $\overset{\Delta}{OPQ}$ y que es el lado final del ángulo α. Un segmento $\overline{OQ}$ de longitud x, que es el cateto adyacente al ángulo α.
Un segmento $\overline{PQ}$de longitud y, que es el cateto opuesto al ángulo α.
Recordemos que el objetivo principal es tratar de trasladar las propiedades de triángulos rectángulos para intentar encontrar el signo y facilitar el cálculo de las líneas trigonométricas correspondientes a cualquier ángulo.
En cada una de las situaciones siguientes y cada vez que utilicemos la circunferencia trigonométrica recuerda analizar los catetos opuesto y adyacente, y la hipotenusa.



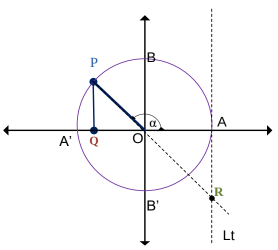
Situación 1
Sea $\alpha = 30º$, encontrar a partir de la circunferencia trigonométrica las razones trigonométricas $sen\,\alpha\,, cos\,\alpha$ y $tan\,\alpha$.
Graficamos la circunferencia trigonométrica para $\alpha = 30^{o}$:



$$sen\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{y}{1}$$
$$cos\,\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{x}{1}$$
$$tan\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{y}{x}$$

Situación 2

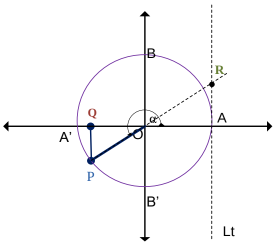
- Sea $\boldsymbol{\alpha = 120º}$, encontrar a partir de la circunferencia trigonométrica él y $\boldsymbol{tan\,\alpha}$.



Graficamos la circunferencia trigonométrica para $\boldsymbol{\alpha = 120^{o}}$:

$$\boldsymbol{sen\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{y}{1}}$$
$$\boldsymbol{cos\,\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{-x}{1}}$$
$$\boldsymbol{tan\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = -\frac{y}{x}}$$

Situación 3



- Sea $\alpha = 200º$, encontrar a partir de la circunferencia trigonométrica él $sen\,\alpha\,, cos\,\alpha$ y $tan\,\alpha$.

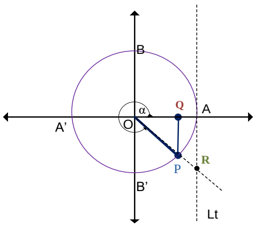
Graficamos la circunferencia trigonométrica para $\alpha = 200^o$:

$$\boldsymbol{sen\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{-y}{1}}$$

$$\boldsymbol{cos\,\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{-x}{1}}$$

$$\boldsymbol{tan\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{y}{x}}$$

Situación 4



- Sea $\alpha = 310º$, encontrar a partir de la circunferencia trigonométrica él $sen\,\alpha\,, cos\,\alpha$ y $tan\,\alpha$.

Graficamos la circunferencia trigonométrica para $\alpha = 310^o$:

$$\boldsymbol{sen\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{-y}{1}}$$

$$\boldsymbol{cos\,\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{x}{1}}$$

$$\boldsymbol{tan\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = -\frac{y}{x}}$$

Actividades de Comprensión

Actividad Nº 10

1. Reconstruya con lápiz y papel los pasos para construir la circunferencia trigonométrica e identifique:
   a. Vértices de la circunferencia
   b. Punto P que pertenece a la circunferencia.
   c. Segmento $|\overline{OP}|$
   d. Distancia del segmento $|\overline{OP}|$
   e. Segmento $\overline{OQ}$
   f. Coordenadas del punto Q.
   g. Triángulo $O\overset{\Delta}{P}Q$
   h. Ángulo α
   i. Línea tangente
   j. Punto R
   k. Triángulo $O\overset{\Delta}{R}A$
2. Siguiendo el procedimiento utilizado en las situaciones 1, 2, 3 y 4; calcular las razones trigonométricas para 40º, 130º, 210º Y 290º.

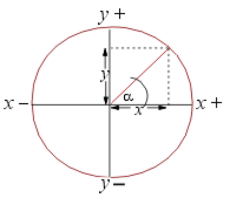
Signos de las razones trigonométricas según el cuadrante

En el *primer cuadrante*, vemos que: el cateto adyacente se ubica sobre el eje *x*, así que lo denominaremos "*x*"; al cateto opuesto, que se ubica sobre el eje *y*, lo llamaremos "*y*". La hipotenusa, que es el radio de la circunferencia, la designaremos "r".

$$sen\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r};\quad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r};\quad tan\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y}{x}$$

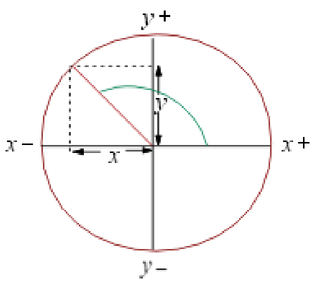
PRIMER CUADRANTE:

Ya que "*x*", "*y*", "r", son positivas, entonces, Todas las razones trigonométricas en el primer cuadrante son positivas.



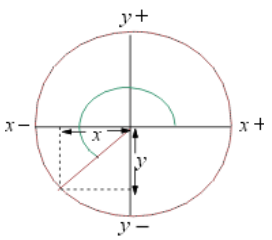
sen	cosec	tan	cotan	cos	sec
+	+	+	+	+	+

En el ***segundo cuadrante***, el cateto adyacente cae sobre el eje negativo de las *x*, mientras que el cateto opuesto sigue sobre el eje positivo de las *y*. El radio (la



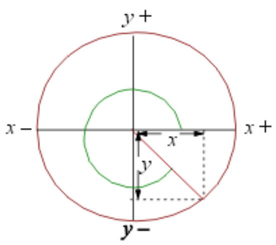
hipotenusa) sigue siendo positiva en todos los cuadrantes. Por lo tanto: el coseno, la tangente y sus inversas (secante y cotangente) tienen resultados negativos.

sen	cosec	tan	cotan	cos	sec
+	+	–	–	–	–



En el ***tercer cuadrante***, tanto el cateto adyacente como el cateto opuesto tienen sus signos negativos, ya que caen sobre la parte negativa de los ejes. En este caso la tangente (y su inversa, la cotangente) resultan positivas.

sen	cosec	tan	cotan	cos	sec
–	–	+	+	–	–

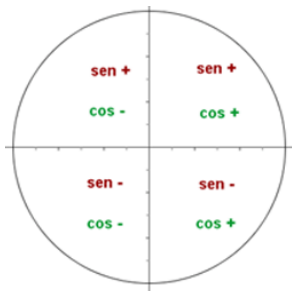


En el ***cuarto cuadrante***, el cateto adyacente vuelve a estar sobre el eje positivo de las *x*, mientras que el cateto opuesto sigue sobre el eje negativo de las *y*. En este caso, las únicas razones cuyo resultado será positivo son el coseno y la secante.

sen	cosec	tan	cotan	cos	sec
–	–	–	–	+	+

cuadrantes	
II	I
III	IV

sen - cosec		cos - sec		tan - cotan	
+	+	-	+	-	+
–	–	-	+	+	-



Situación 1

- Encontrar los signos de las razones trigonométricas de un ángulo de 60º.

  Como es un ángulo correspondiente al primer cuadrante el seno, coseno y tangente son positivas.

Situación 2

- Encontrar los signos de las razones trigonométricas de un ángulo de 140º.

  Este ángulo pertenece al segundo cuadrante el seno es positivo y el coseno y la tangente negativos.

Situación 3

- Encontrar los signos de las razones trigonométricas de un ángulo de 250º.

El ángulo corresponde al tercer cuadrante por lo tanto el seno y el coseno son negativos y la tangente positiva.

Situación 4

- Encontrar los signos de las razones trigonométricas de un ángulo de 330º.

  Este ángulo corresponde al cuarto cuadrante por lo tanto el seno y la tangente son negativos y el coseno es positivo.

Actividades de Comprensión

Actividad Nº 11

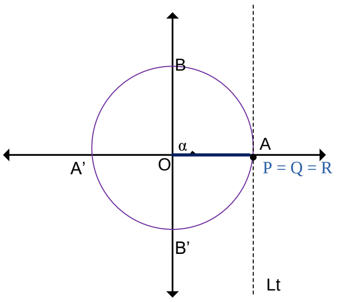
1. Confeccione un resumen que exponga el signo por cada uno de los cuadrantes para las 6 líneas trigonométricas.
2. Sin calcular determinar el signo de las líneas trigonométricas para ángulos de 40º, 130º y 220º y 350º.

Razones trigonométricas de 0º, 90º, 180º, 270º, 360º

Para encontrar las razones trigonométricas de 0º, 90º,180º, 270º, 360º (ángulos cuadrantales) interpretaremos los resultados correspondientes utilizando la circunferencia trigonométrica. Recordar identificar de cada caso el cateto opuesto, el adyacente y la hipotenusa del triángulo $\overset{\triangle}{OPQ}$, que serán de utilidad para determinar la razón correspondiente.

Para 0º

$$\overline{OP}=1,\overline{PQ}=0,\overline{OQ}=1$$



$$sen\,0\,º=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{0}{1}=0$$

$$cos\,0\,º=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{1}{1}=1$$

$$tan\,0\,º=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{0}{1}=0$$

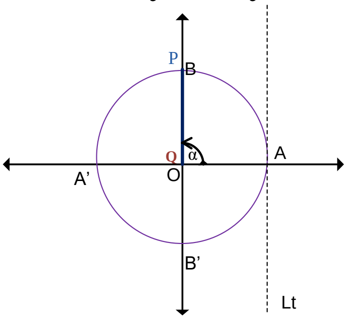
$$cotan\,0\,º=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}=\frac{1}{0}=\text{No def.}$$

$$sec\,0\,º=\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{1}{1}=1$$

$$cosec\,0\,º=\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}=\frac{1}{0}=\text{No def.}$$

Para 90º

$$\overline{OP}=1,\overline{PQ}=1,\overline{OQ}=0$$



$$sen\,90º=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{1}{1}=1$$

$$cos\,90º=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{0}{1}=0$$

$$tan\,90º=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{1}{0}=\text{No def.}$$

$$cotan\,90º=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}=\frac{0}{1}=0$$

$$sec\,90º=\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{1}{0}=\text{No def.}$$

$$cosec\,90º=\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}=\frac{1}{1}=1$$

Para 180º

$$sen\,180º=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{0}{1}=0$$

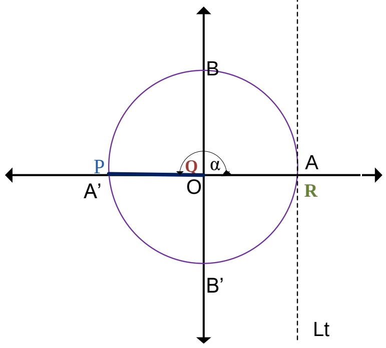
$$cos\,180º=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$tan\,180º=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{0}{-1}=0$$

$$cotan\,180º=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}=\frac{-1}{0}=\text{No def.}$$

$$sec\,180º=\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{1}{-1}=-1$$

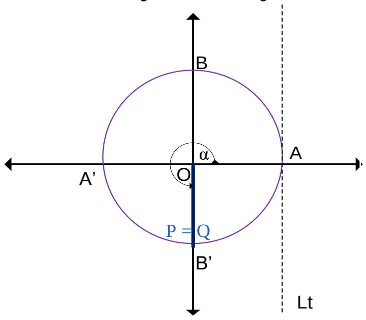
$\overline{OP} = 1, \overline{PQ} = 0, \overline{OQ} = -1$



$$cosec\,180º = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{0} = \text{No def.}$$

Para 270º

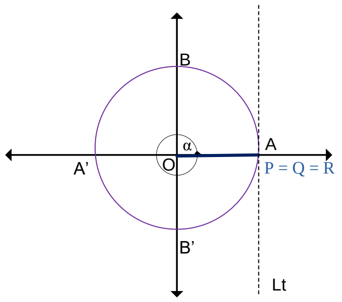
$\overline{OP} = 1, \overline{PQ} = -1, \overline{OQ} = 0$



$$sen\,270º = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{-1}{1} = -1$$
$$cos\,270º = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{0}{1} = 0$$
$$tan\,270º = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{-1}{0} = \text{No def.}$$
$$cotan\,270º = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{0}{-1} = 0$$
$$sec\,270º = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{0} = \text{No def.}$$
$$cosec\,270º = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{-1} = -1$$

Para 360º

$\overline{OP} = 1, \overline{PQ} = 0, \overline{OQ} = 1$



$$sen\,360º = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{0}{1} = 0$$
$$cos\,360º = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{1} = 1$$
$$tan\,360º = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{0}{1} = 0$$
$$cotan\,360º = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{0} = \text{No def.}$$
$$sec\,360º = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{1} = 1$$
$$cosec\,360º = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{0} = \text{No def.}$$

Al final todos llegamos con nuestros valores, que resumimos aquí:

Resumen

	0º	90º	180º	270º	360º
seno	0	1	0	-1	0
coseno	1	0	-1	0	1
tangente	0	No def.	0	No def.	0
cotangente	No def.	0	No def.	0	No def.
secante	1	No def.	-1	No def.	1
cosecante	No def.	1	No def.	-1	No def.

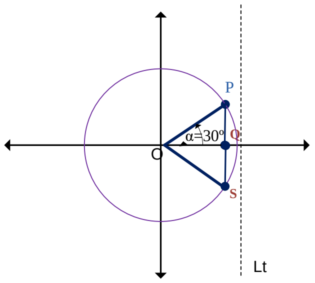
Actividades de Producción

Actividad Nº 12

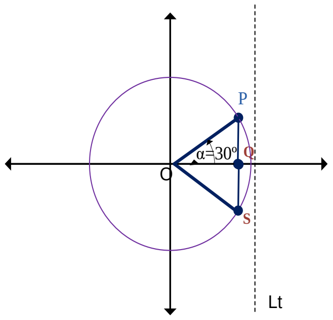
1. De cada una de las situaciones analizadas en este apartado determinar:
   a. Cateto opuesto $\overline{PQ}$
   b. Cateto adyacente $\overline{OQ}$
   c. Hipotenusa $\overline{OP}$

Razones trigonométricas para ángulos de 30º, 45º, 60º

Para 30º



Grafiquemos en la circunferencia trigonométrica un ángulo de 30º. Para calcular las razones trigonométricas necesitamos conocer el cateto opuesto $\overline{PQ}$, el cateto adyacente $\overline{OQ}$ y la hipotenusa $\overline{OP}$, que como coincide con el radio de la circunferencia $\overline{OP} = 1$.Para encontrar el valor de $\overline{PQ}$, vamos a proyectar el segmento $\overline{PQ}$hasta cortar la circunferencia y obtendremos un punto S. Si observamos ahora tenemos un triángulo equilátero $\overset{\Delta}{OPS}$ cuyos ángulos son de 60º cada uno y con sus tres lados iguales por lo que $\overline{OP} = 1$, $\overline{OS} = 1$, y $\overline{PS} = 1$. A partir de $\overline{PS}$podemos obtener $\overline{PQ}$ como el valor medio de $\overline{PS}$, entonces $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{PS}$, por lo que $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{PS} = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$. Nos resta averiguar el cateto adyacente $\overline{OQ}$ utilizando el Teorema de Pitágoras determinamos que el valor del cateto adyacente es $\overline{OP}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2$, despejando obtenemos $\overline{OQ}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ despejando $\overline{OQ} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Con todos los datos podemos encontrar todas las razones trigonométricas.



$$\boldsymbol{sen\,3\,0º} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{|PQ|}}{\overline{|OP|}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{cos\,3\,0º} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

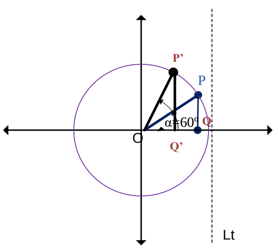
$$\boldsymbol{tan\,3\,0º} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{cotan\,3\,0º} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\boldsymbol{sec\,3\,0º} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{cosec\,3\,0º} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

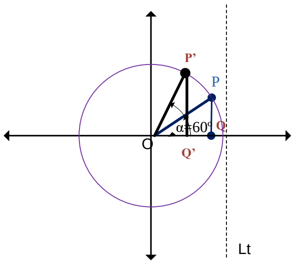
Para 60º



Grafiquemos en la circunferencia trigonométrica un ángulo de 60º, y a partir de esta gráfica observamos que el triángulo que se forma $\overset{\Delta}{OP'Q'}$ es coincidente con el triángulo $\overset{\Delta}{OPQ}$ que trabajamos para un ángulo de 30º. Pero para un ángulo de 60º el cateto opuesto va a coincidir con el valor del cateto adyacente del ángulo de 30º y el cateto adyacente de 60º va a coincidir con el cateto opuesto de un ángulo de 30º. Para este caso $\overline{PQ} = \overline{OQ'} = \frac{1}{2}$ y $\overline{OQ} = \overline{P'Q'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Con estos datos construimos las razones trigonométricas.

$$\boldsymbol{sen\,6\,0º} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{OP'}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{cos\,6\,0º} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$



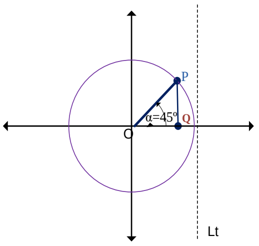
$$\boldsymbol{tan\,60º = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{OQ'}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{cotan\,60º = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

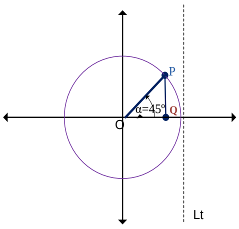
$$\boldsymbol{sec\,60º = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ'}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2}$$

$$\boldsymbol{cosec\,60º = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{P'Q'}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Para 45º



Grafiquemos en la circunferencia trigonométrica un ángulo de 45º, y a partir de esta gráfica observamos que el ángulo opuesto a α también mide 45º, por ello los lados opuestos a estos ángulos son iguales, entonces $\overline{PQ} = \overline{OQ}$. Aplicando el Teorema de Pitágoras podemos encontrar el valor de estos segmentos que, obtenemos $\overline{OP}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2$, como $\overline{OP} = 1$ y a $\overline{PQ}$, $\overline{OQ}$ los denotaremos con la variable x obtenemos $1^2 = x^2 + x^2$ entonces si despejamos el valor de x nos queda $x = \frac{1}{2}$. Por lo tanto $\overline{PQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, racionalizando obtenemos que $\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Con estos datos construimos las razones trigonométricas.



$$\boldsymbol{sen\,45º = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boldsymbol{cos\,45º = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boldsymbol{tan\,45º = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1}$$

$$\boldsymbol{cotan\,45º = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1}$$

$$\boldsymbol{sec\,45º = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}}$$

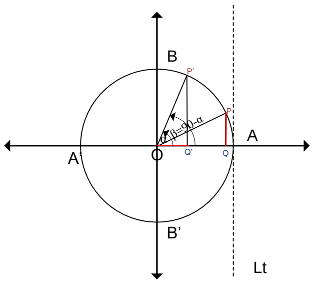
$$\boldsymbol{cosec\,45º = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}}$$

Actividad Nº 13

1. De cada una de las situaciones analizadas en este apartado determinar:
   a. Cateto opuesto $\overline{PQ}$
   b. Cateto adyacente $\overline{OQ}$
   c. Hipotenusa $\overline{OP}$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios.

Recordemos que dos ángulos α y β son complementarios si su suma es igual a 90º, es decir si:



$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 90^{o}}$$

Siα y βsuman 90º entonces se cumple $90 - \alpha = \beta$ o $90 - \beta = \alpha$.
Para ángulos complementarios valen las siguientes identidades.

En la circunferencia los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{APQ}$ y el triángulo rectángulo $AP'Q'$ son iguales por tener la hipotenusa y un cateto iguales. Las siguientes razones trigonométricas de los ángulos complementarios α y $90^{o} - \alpha$ son:

$$sen(90^{o} - \alpha) = cos\,\alpha$$
$$cos(90^{o} - \alpha) = sen\,\alpha$$
$$tan(\,90^{o} - \alpha) = cotan\,\alpha$$
$$cosec(\,90^{o} - \alpha) = sec\,\alpha$$
$$sec(\,90^{o} - \alpha) = cosec\,\alpha$$
$$cotan(\,90^{o} - \alpha) = tan\,\alpha$$

Situación 1

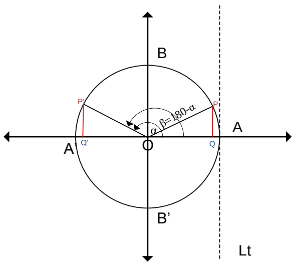
- $\text{sen } 60º = \cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 70º = \text{cotan } 20º = 2{,}75$
- $\text{cosec } 45º = \sec 45º = \sqrt{2}$

Razones trigonométricas de ángulos suplementarios

Recordemos que dos ángulos α y β son complementarios si su suma es igual a 180º, es decir si:

$$\alpha + \beta = 180º$$

En la circunferencia los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{APQ}$ y el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AP'Q'}$ son iguales por tener la hipotenusa y un cateto iguales. Las siguientes razones trigonométricas de los ángulos complementarios α y $180º - \alpha$ son:



$$\text{sen}(180º - \alpha) = \text{sen } \alpha$$
$$\cos(1801 - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180º - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\text{cosec}(180º - \alpha) = \text{cosec}\,\alpha$$
$$\sec(180º - \alpha) = -\sec\alpha$$
$$\text{cotant}(180º - \alpha) = -\text{cotan}\,\alpha$$

Si observamos las conclusiones arribamos a que dos ángulos suplementarios tienen los senos iguales y los cosenos y tangentes opuestos.
Ejemplo:

- $\text{sen } 120º = \text{sen } 60º = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\cos 150º = -cos30º = -0{,}86$.
- $cotan\ 120º = -\cot 60º = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Actividades de Producción

Actividad Nº 14

1. Confeccione un cuadre que resuma las razones trigonométricas para ángulos complementarios y suplementarios. Para cada una de ellas construya la circunferencia trigonométrica.

Identidades Trigonométricas

Las identidades trigonométricas son igualdades en las que intervienen razones trigonométricas, verificables para cualquier valor que pudieran tomar los ángulos sobre los que se aplican las razones intervinientes.

El siguiente cuadro resume las seis identidades fundamentales, a saber:

1) $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$	3) $cotan\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$	5) $cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$
2) $tan\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$	4) $sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$	6) $cotan\,\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}$

1) $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$

2) $tan\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$

3) $cotan\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$

4) $sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$

5) $cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$

6) $cotan\,\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}$

Este cuadro no es de mucha utilidad para deducir conociendo el valor de la razón trigonométrica a que ángulo corresponde. También nos aporta relaciones que nos facilitarán encontrar las razones trigonométricas mediante la utilización de calculadora. La mayoría de las calculadoras nos permiten calcular el seno, el coseno y la tangente; pero no poseen teclas para la cotangente, secante y cosecante.

Situación 1

- Si $sen\,\alpha = 0{,}5$ calcular las restantes líneas trigonométricas.

Aplicando la identidad $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$obtenemos:

$$0,5^2 + cos^2\,\alpha = 1$$
$$cos^2\,\alpha = 1 - 0,5^2$$
$$cos\,\alpha = \sqrt{1-0,5^2} = 0{,}86$$

Aplicando la identidad $tan\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$ obtendremos la tangente:

$$tan\,\alpha = \frac{0{,}5}{0{,}86} = 0{,}58$$

Aplicando $cotan\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$, obtendremos la cotangente:

$$cotan\,\alpha = \frac{0{,}86}{0{,}5} = 1{,}72$$

Para obtener la secante utilizamos $sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$

$$sec\,\alpha = \frac{1}{0{,}86} = 1{,}16$$

Obtenemos la cosecante al aplicar $cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{0{,}5} = 2$$

Situación 2

Determina si existe un ángulo x en el I cuadrante que satisfaga $cos\,x = 0{,}5$.

Utilizamos la relación fundamental que liga el seno y el coseno de un ángulo: $sen^2\,x + cos^2\,x = 1$

En nuestro caso

$$sen^2\,x + 0,5^2 = 1$$

Despejando $sen\,x$, obtenemos: $sen\,x = \sqrt{1-+0,5^2} = 0{,}8660$

Por lo tanto, despejando x tenemos: $x = sen^{-1}\,0{,}8660 = 60°$.

Como 60º es un ángulo que corresponde al primer cuadrante hemos dado respuesta a lo solicitado.

Situación 3

Determine su existe un ángulo x cuya $tan\,x = -\frac{2}{3}$y el ángulo pertenece al **III** cuadrante.

Teniendo en cuenta que el ángulo solicitado pertenece al **III** cuadrante y que el signo de la tangente en el **III** cuadrante es positivo, podemos afirmar que no existe ningún ángulo que cumpla con las condiciones solicitadas.

Identidades de paridad

Las siguientes igualdades son conocidas como identidades de paridad. Para deducirlas utilice la circunferencia trigonométrica. El ángulo –α representa el ángulo opuesto de α.

- $\boldsymbol{sen(-\alpha) = -\,sen\,\alpha}$
- $\boldsymbol{cos(-\alpha) = cos\,\alpha}$
- $\boldsymbol{tan(-\alpha) = -\,tan\,\alpha}$
- $\boldsymbol{cosec(-\alpha) = -\,cosec\,\alpha}$
- $\boldsymbol{sec(-\alpha) = sec\,\alpha}$
- $\boldsymbol{cot(-\alpha) = -\,cot\,\alpha}$

Observando el cuadro podemos concluir que los ángulos opuestos tienen los cosenos iguales y los senos y tangentes opuestos.
Ejemplo:

- El $sen(-30^{o}) = -\,sen\,3\,0^{o}$.
- La $tan(-75^{o}) = -\,tan\,7\,5^{o}$.
- El $cos(-175^{o}) = cos(175)$.

Usando Calculadora…
Para obtener las razones trigonométricas de un ángulo las calculadoras científicas tienen las teclas “sin”, “cos”, “tan”, correspondiente a las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Si el ángulo está expresado en grados, la calculadora tiene que estar en modo “DEG”. Si estamos trabajando con radianes el modo debe estar seteado en “RAD”.
Para pasar de grados, minutos y segundos a grados y viceversa utilizar la tecla “°’’’”, esta nos permite introducir en la calculadora un ángulo dado en grados, minutos y segundos. La calculadora nos da, automáticamente, una expresión decimal de la medida del ángulo (en grados).
Para pasar de una expresión decimal de grados a grados, minutos y segundos, se utiliza la secuencia “INV” “°’’’” (“INV” ó “SHIFT” dependiendo de la calculadora).
Para calcular un ángulo conocida una razón trigonométrica utilizaremos la tecla “sen^{-1}” ó “arcseno” que suele corresponder a la secuencia “INV” “SIN”. Análogamente para coseno y tangente. Para obtener la razón trigonométrica de la cotangente, secante y cosecante debe recordar las siguientes identidades trigonométricas:

- $sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$
- $cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$
- $cotan\,\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}$

Actividades de Producción

Actividad Nº 15

1. Confeccione un cuadro que resuma las identidades trigonométricas y de paridad.

¡Pare! Vamos a realizar Pausa de Recapitulación.

Vamos a realizar una Pausa de Recapitulación.

Pausa de Recapitulación

- En esta pause dejamos a su criterio la incorporación al glosario de los términos que considere no debe olvidar.

Actividades de Producción

Actividades Obligatorias

7. Resolver las líneas trigonométricas de triángulos rectángulos con las siguientes características. Recuerde que **a** representa la hipotenusa.

Orden	a	b	c	$\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{tan}\ \boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{sen}\ \boldsymbol{B}$	$\mathbf{cos}\ \boldsymbol{B}$	$\mathbf{tan}\ \boldsymbol{B}$
a.	9 cm	7cm							
b.		9 cm	10 cm						
c.	7,8 cm		3,4 cm						
d.	12 m	10,5 m							
e.		22 m	14 m						
f.	17 cm		6 cm						
g.	16 m	5 m							
h.		4 m	11 m						
i.		2 cm	3 cm						

8. Completar el siguiente cuadro (expresar en razones):

Orden	Lados			Ángulos		Razones Trigonométricas					
	a	**b**	**c**	**B**	**C**	$\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{tan}\ \boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{sen}\ \boldsymbol{B}$	$\mathbf{cos}\ \boldsymbol{B}$	$\mathbf{tan}\ \boldsymbol{B}$
a.			12 cm		60º						
b.		24 cm		50º							
c.			15 cm		30º						
d.	3 cm			36º							
e.		61 cm			42º						
f.			35 cm	40º							
g.	6 cm				37º						
h.		20 cm		30º							
i.	26 cm				56º						

9. Encontrar las razones trigonométricas teniendo en cuenta los datos y condiciones establecidas para los ángulos.

Orden	Dato	Condición	Razones Trigonométricas		
			$\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{tan}\ \boldsymbol{\alpha}$
a.	$\operatorname{sen}\alpha = {}^{1}/_{2}$	$0 < \pi < \frac{\pi}{2}$			
b.	$\cos\alpha = -{}^{\sqrt{2}}/_{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$			
c.	$\tan\alpha = 2$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$			
d.	$\operatorname{cotan}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$			
e.	$\sec\alpha = 3$	$0 < \pi < \frac{\pi}{2}$			

f.	$\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{3}$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$			

10. Encontrar las razones trigonométricas para los siguientes ángulos, expresar el resultado en razones se sugiere utilizar la circunferencia trigonométrica.

Orden	Ángulo	Razones Trigonométricas					
		sen α	**cos α**	**tan α**	**cosec α**	**sec α**	**cotan α**
a.	135º						
b.	240º						
c.	330º						
d.	-240º						
e.	-360º						
f.	-45º						

11. Sin utilizar calculadora resolver las razones trigonométricas indicadas siempre y cuando estas existan.

Orden	Ángulo	Resultado
a.	$\cot 45º$	
b.	$\operatorname{sen} 0º$	
c.	$\sec 0º$	
d.	$\cot -60º$	
e.	$\cos 90º$	
f.	$\sec -270º$	
g.	$\tan 45º$	
h.	$\operatorname{cotan} 90º$	
i.	$\sec -45º$	

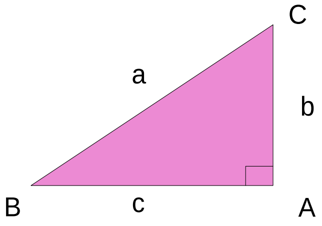
Cierre del módulo

Esperamos ya haya logrado comprender los contenidos tratados en este módulo, si es así, entonces estamos en condiciones de avanzar.
Sigamos con el recorrido que hemos propuesto…

Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo es encontrar las medidas de sus tres lados y tres ángulos a partir de algunos de ellos que son conocidos. Necesitamos para resolver triángulos rectángulos conocer dos lados del triángulo o bien un lado y un ángulo distinto del recto.

- Para calcularlos hay que emplear algunas de las siguientes relaciones:



$$A + B + C = 180^o$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$sen\,B = \frac{b}{a} \quad cos\,B = \frac{c}{a} \quad tan\,B = \frac{b}{c}$$
$$sen\,C = \frac{c}{a} \quad cos\,C = \frac{b}{a} \quad tan\,C = \frac{c}{b}$$

Para resolver triángulos rectángulos también nos serán de utilidad entender el concepto de ángulos de elevación o depresión.

Un ángulo de elevación es aquel medido desde la horizontal, al que una persona tendría que elevar la línea de su visión para ver un objeto.

Un ángulo de depresión es aquel medido desde la horizontal, al que una persona tendría que bajar la línea de su visión para ver un objeto.

Las siguientes imágenes ilustran los dos casos:

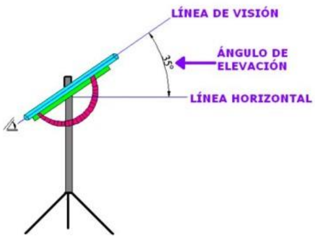


Figura 1: www.aulafacil.com

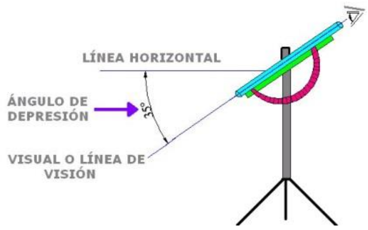
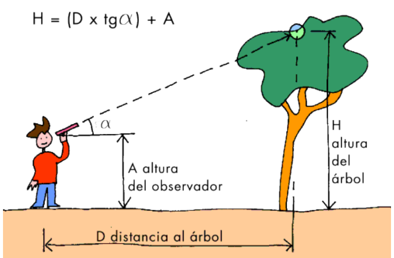


Figura 2: www.aulafacil.com

Te proponemos otra imagen para analizar:

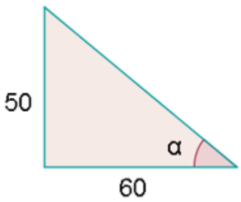


Es momento de analizar las siguientes situaciones:

Situación 1

- Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.

Primeros intentamos esbozar un gráfico de la situación planteada:

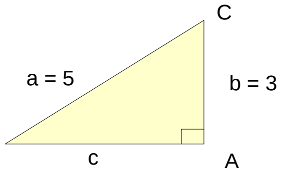


Como datos del triángulo rectángulos tenemos el cateto opuesto y el cateto adyacente. La línea trigonométrica que involucra estos dos datos en la tangente, por lo tanto:

$$tan\,\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{50}{60} = 0{,}8\hat{3} \rightarrow \alpha = tan^{-1}(0{,}8\hat{3}) = 39^o48'20''$$

Una vez determinado el ángulo estamos en condiciones de encontrar las otras líneas trigonométricas.

Situación 2



- Hallar las razones trigonométricas del ángulo agudo menor de un triángulo rectángulo si la hipotenusa mide 5 cm y uno de los catetos mide 3 cm. En este caso ya tenemos todos los datos necesarios para resolver el triángulo rectángulo.

En nuestro caso tenemos los siguientes datos:
a = 5 - hipotenusa
b = 3 - cateto
c = ? - cateto
Utilizamos el teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$5^2 = 3^2 + c^2$$
$$c^2 = 5^2 - 3^2$$
$$c = \sqrt{16} = 4$$

Para encontrar las razones trigonométricas del menor ángulo agudo se entiende que como a menor lado se opone menor ángulo por lo tanto debemos calcular las razones correspondientes al ángulo $\hat{B}$.

$\boldsymbol{sen\, B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0,6}$
$\boldsymbol{cos\, B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0,8}$
$\boldsymbol{tan\, B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{4} = 0,75}$
$\boldsymbol{cotan\, B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{4}{3} = 1,33}$
$\boldsymbol{sec\, B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5}{4} = 1,25}$
$\boldsymbol{cosec\, B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{5}{3} = 1,67}$

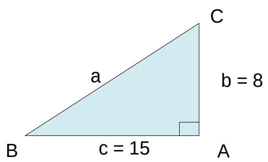
Hemos encontrado las razones trigonométricas, ahora podemos encontrar el valor de cada ángulo del triángulo.
Con los datos aportados por la razón trigonométrica del seno vamos a despejar y obtener el valor del ángulo B:

$$\boldsymbol{sen\, B = 0,6 \rightarrow B = sen^{-1}\, 0,6 = 36º}$$

Utilizando la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y que el ángulo A es recto encontramos el valor del otro ángulo:

$$A + B + C = 180^o$$
$$90^o + 36^o + C = 180^o$$
$$C = 180^o - 90^o - 36^o = 54^o$$

Situación 3



- Tenemos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 y 15 metros. Hallar las razones trigonométricas del ángulo agudo mayor.

En este caso:
a = ?
b = 8
c= 15
Utilizando el teorema de Pitágoras obtenemos el valor del lado que nos falta.

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 8^2 + 15^2$$
$$a^2 = 289$$
$$a = \sqrt{289} = 17$$

Para encontrar las razones trigonométricas del mayor ángulo agudo se entiende que como a mayor lado se opone mayor ángulo por lo tanto debemos calcular las razones correspondientes al ángulo $\hat{C}$.

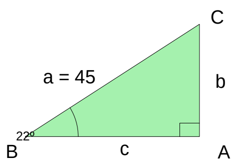
$\boldsymbol{sen\,C = \frac{15}{17} \approx 0,88}$
$cos\,C = \frac{8}{17} \approx 0,47$
$tan\,C = \frac{15}{8} \approx 1,87$
$cotan\,C = \frac{8}{15} \approx 0,5\overset{\frown}{3}$
$sec\,C = \frac{17}{8} \approx 2,12$
$cosec\,C = \frac{17}{15} \approx 1,1\overset{\frown}{3}$

Ahora encontraremos el valor de los dos ángulos agudos del triángulo despejando C de la razón trigonométrica del seno y obtenemos:

$$\boldsymbol{sen\,C \approx 0,88 \rightarrow C = sen^{-1}\,0,88 = 61º}$$

Utilizando la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y que el ángulo A es recto encontramos el valor del otro ángulo:

$$A + B + C = 180^{o}$$
$$90^{o} + B + 61^{o} = 180^{o}$$
$$B = 180^{o} - 90^{o} - 61^{o} = 29^{o}$$



Situación 4

- Resolver el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 45 metros y el ángulo B es de 22º.

Datos:
a = 45
b = ?
c = ?
A = 90º
B = 22º
C = 180º - 90º - 22º = 68º

Para encontrar el lado b utilizaremos la razón trigonométrica seno porque involucra el lado y el valor de la hipotenusa:

$$sen\,B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\rightarrow sen\,2\,2^{o} = \frac{b}{45} \rightarrow b = sen\,2\,2^{o}.\,45 = 16.86m$$

Para encontrar el lado c utilizaremos la razón trigonométrica coseno porque involucre el lado y el valor de la hipotenusa:

$$cos\,B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow$$
$$cos\,2\,2^{o} = \frac{c}{45} \rightarrow c = cos\,2\,2^{o}.\,45 = 41,72m$$

Actividades de Comprensión

Actividad Nº 16

1. ¿Qué entendemos por resolver triángulos rectángulos?
2. ¿Qué datos son necesarios para resolver triángulos rectángulos?
3. Confeccione un cuadro donde sintetice las relaciones que son de utilidad para resolver triángulos rectángulos.
4. ¿Qué relación, propiedad o Teorema utilizará si los datos que se le aportan son dos catetos?

5. ¿Qué relación, propiedad o Teorema utilizará si los datos que se le aportan son la hipotenusa y un cateto?
6. ¿Qué relación, propiedad o Teorema utilizará si los datos que se le aportan son la hipotenusa y uno de los ángulos agudos?
7. ¿Qué relación, propiedad o Teorema utilizará si los datos que se le aportan son un cateto y uno de los ángulos agudos?

¡Pare!
Vamos a realizar la última Pausa de Recapitulación.

Pausa de Recapitulación

- Sume al glosario los términos que considere le serán de utilidad para tener en cuenta de este módulo.

Actividades de Producción

12. Resolver los siguientes problemas que involucran triángulos rectángulos.

Orden	Ángulo	Resultado
a)	Resolver un triángulo rectángulo e isósceles en el que la hipotenusa vale 9 m.	
b)	Resolver el triángulo que tiene un cateto de 8 cm y cuya hipotenusa mide 12 cm.	
c)	Resolver el triángulo cuya hipotenusa mide 27 cm y uno de sus ángulos es de 30º.	
d)	Resolver el triángulo ABC del que se conocen los lados a = 40 m y b = 32 m y el ángulo B = 123º.	
e)	Resolver el triángulo ABC del que se conocen sus tres lados: a = 20 m, b = 15 m y c = 26 m.	
f)	Resolver el triángulo ABC del que se conocen los lados a = 9 m y b = 17 m y el ángulo C = 50º.	
g)	Resolver el triángulo ABC del que se conocen los ángulos A = 40º y B = 55º y el lado c = 50 m.	
h)	Resolver el triángulo ABC del que se conocen los lados a = 20 m y b = 15 m y el ángulo A = 50|.	
i)	Hallar la longitud de la sombra de un árbol de 10 m de altura cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de 15º.	
j)	Calcular la longitud de la sombra de un árbol de 18 m de altura cuando el ángulo que forman los rayos solares con el suelo es de 22º.	
k)	Una escalera de 8,2 m está apoyada en una pared de forma que alcanza una altura de 6 m. ¿Qué ángulo forma con el suelo?	
l)	Una escalera de 6,5 m de longitud se apoya sobre una pared vertical formando con ella un ángulo de 18º. ¿Cuál es la altura que alcanza?	
m)	Calcular el ángulo de elevación al sol, si una persona que mide 165cm de estatura proyecta una sombra de 132cm de largo a nivel del suelo.	51°
n)	Un constructor desea construir una rampa de 8m de largo que se levanta a una altura de 1.65m sobre el nivel del suelo. Encuentre el ángulo de la rampa con la horizontal.	12°
o)	Un cable está sujeto a lo alto de una antena de radio y a un punto en el suelo horizontal que está a 40m de la base de la antena. Si el alambre hace un ángulo de 58º, con el suelo, encuentre la longitud del alambre.	75,48 mts
p)	Desde un punto al nivel del suelo y a 135 metros de la base de una torre, el ángulo de elevación a la parte más alta de la torre es 57º. Calcular la altura de la torre.	207,88

q)	Una banda transportadora de 9 metros de largo puede bajar o subir hidráulicamente hasta un ángulo de 40º, para descargar pasajeros de las aeronaves. Hallar la altura máxima sobre la plataforma a que la banda transportadora puede llegar.	5,79 mts
r)	La estructura natural más alta hecha por el hombre, en el mundo, es una torre transmisora de televisión situada en Fargo, Dakota del Norte. Desde una distancia de 1600 metros a nivel del suelo, su ángulo de elevación es de 21º. Determinar su altura en metros.	614,18 mts.
s)	Desde un punto A que está a 8.2 metros sobre el nivel del suelo, el ángulo de elevación a la parte alta de un edificio es de 31º. Encuentre la altura del edificio.	4,93 mts.
t)	Una escalera que mide 6.6 metros se apoya en un edificio y el ángulo entre ambos es de 22º. Calcular la distancia del pie del edificio hasta donde se apoya la escalera en el suelo.	2,47 mts.
u)	El extremo superior de una escalera está apoyado en una pared de forma que alcanza una altura de 3mts. Si forma un ángulo 51º con el suelo, ¿Cuál es el largo de la escalera?	Largo de la escalera 3,86 mts.
v)	Un observador se encuentra en un faro al pie de un acantilado. Está a 687m sobre el nivel del mar, desde este punto observa un barco con un ángulo depresión de 23º. Se desea saber a qué distancia de la base del acantilado se encuentra el barco.	La distancia de la base es 291,61 mts.

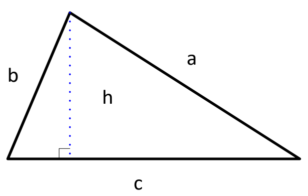
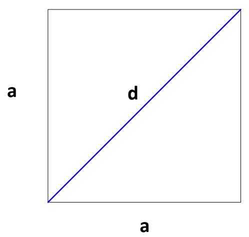
Cierre del módulo

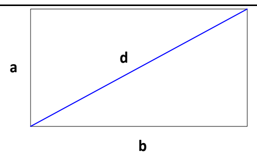
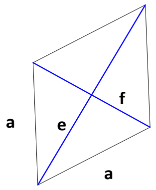
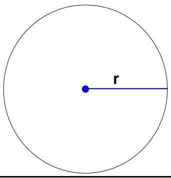
Perímetro y Áreas de figuras geométricas

A continuación, le presentamos un cuadro que resumen de perímetros y áreas de distintas figuras geométricas. Previo a ello recordemos que:

Perímetro: es la suma de los lados de una figura geométrica. Es su contorno.

Área: es la medida de la superficie de una figura; es decir, la medida de su región interior.

Figura	Perímetro y Área
Triángulo 	**Perímetro: a + b +c** **Área:** $= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{c.h}{2}$
Cuadrado 	**Perímetro: 4.a** **Área:** $= \text{lado} \times \text{lado} = \text{a}^2$ $A = \frac{d^2}{2}$
Rectángulo	**Perímetro: 2.a + 2.b** **Área:** $= \text{base} \times \text{altura} = \text{a.b}$

	
Rombo 	**Perímetro: 4a** **Área:** $= \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2} = \frac{e.f}{2}$
Circunferencia 	**Perímetro:** $2.\pi.r$ **Área:** $\pi.r^2$

Hemos finalizado esta Unidad, esperamos que haya logrado comprender los contenidos tratados en este módulo. El estudio de las razones trigonométricas es realmente atrapante y de mucha utilidad para modelizar situaciones de la vida real que necesitarán de cálculos, mediciones y estimaciones. Esperamos haber contribuido a refrescar estos temas que tendrán un tratamiento recurrente a lo largo de la carrera elegida.
Gracias por acompañarnos.

Fin.