Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias
Universidad Nacional de San Luis
UNSL

CURSO DE INGRESO

MATEMÁTICA

INGENIERÍA AGRONÓMICA

2025

Equipo docente

Ing. Esp. Gabriela B. ANDINO

Prof. Jessica B. ALBARRACÍN

Ing. Eliana E. ÁVILA

INTRODUCCIÓN

La Ingeniería en el devenir del tiempo, ha ido ramificándose en una gran cantidad de distintas especialidades, originándose nuevas ingenierías; todas comparten una gran base sólida de conocimientos provenientes del campo de las ciencias fundamentales, mientras que al mismo tiempo, cada una de ellas presenta una formación específica relativa al campo de aplicación. La ingeniería en agronomía surge a partir de la necesidad de resolver problemas relacionados con la agricultura, su objetivo es la optimización de los procesos de producción y transformación de los productos agrícolas, principalmente alimentarios y materias primas. En los últimos tiempos y gobiernos en Argentina, se ha intentado promover y fomentar la formación de ingenieros a través de distintos planes estratégicos de formación. El objetivo principal se estableció para subsanar la escasez que actualmente se presenta. Esta problemática no es ajena en las demás naciones, constituyéndose de este modo el gran inconveniente del actual mundo industrializado, la posibilidad de lograr cubrir los puestos vacantes con orientación técnica especializada. El actual contexto global necesita de las soluciones que aporta la ingeniería para hacer frente a importantes desafíos, que van desde la reducción de la pobreza hasta la atenuación del cambio climático, entre otros. Sin embargo sucede que

> *"El menor atractivo de los estudios de ingeniería entre los jóvenes se debe, al parecer, a que éstos los consideran aburridos y difíciles, y también a que los empleos de ingeniero están mal pagados con respecto al grado de responsabilidad que entrañan..." (informe de la UNESCO, Tony Marjoram).*

Actualmente y desde hace algunas décadas, en el marco universitario se busca mejorar la calidad de las prácticas educativas que se llevan a cabo, en particular de la dimensión pedagógica-didáctica. Los objetivos principales están centrados en proporcionar educación de calidad, en condiciones de equidad e innovación permanente.

Si se compara la situación nacional, acerca de la proporción de ingenieros recibidos, es muy inferior a la cantidad de ingenieros en otros países. Uno de los planes de mejora implementados en la actualidad es el Plan Estratégico de Formación de Ingenieros 2012-2016, impulsado por el Ministerio de Educación de la Nación, el cual establece como objetivo alcanzar a tener un ingeniero graduado por cada 4000 habitantes, esto implicaría 10.000 nuevos egresados por año, para poder asegurar un desarrollo sostenible del modelo productivo del país. Considerando este contexto, el resultado al cual se pretende llegar, son la independencia tecnológica y el crecimiento sostenido del país, para lo que se requiere una gran cantidad especializada de ingenieros y formación técnica. De este modo uno de los principales objetivos de los distintos planes de acción, es lograr reducir la deserción de estudiantes de ingeniería para lograr una mayor cantidad de egresados por año. La principal razón de la disminución del rendimiento y deserción de los alumnos avanzados obedece a razones laborales. La situación socio-económica produce que los alumnos deban trabajar para poder afrontar sus gastos económicos. Otro de los principales problemas es la deficiencia educativa que arrastran los estudiantes desde los ciclos educativos inferiores.

El proceso de formación de los estudiantes de ingeniería espera que los mismos logren desarrollar y adquirir, las herramientas correspondientes que les permitan "hacer frente" a los nuevos desafíos que se puedan presentar, entonces es necesario formarlos para el desarrollo sostenible, lo que implica que la formación del ingeniero debe considerar las implicancias económicas, sociales y ambientales de cada una de sus aplicaciones, para asegurar que no se vean afectadas las necesidades de las generaciones futuras.

Desde esta perspectiva el presente trabajo se configura como una propuesta teórica-práctica de conocimientos matemáticos que se consideran básicos y necesarios para el estudio de los contenidos, o la construcción de los conocimientos, que la materia matemática constituye para los futuros ingenieros agrónomos. Cada guía de trabajos prácticos, ofrece un listado de ejercicios y problemas, donde los estudiantes podrán poner en práctica y perfeccionar algunas técnicas particulares, como también poner a prueba la comprensión de los contenidos teóricos abordados resolviendo diversas situaciones problemáticas. Estas guías cuentan con una lista de soluciones, donde se podrán contrastar y corroborar las soluciones obtenidas. También se proponen actividades que involucran el uso del software dinámico GeoGebra como herramienta para la resolución de las mismas.

El software se puede descargar gratuitamente del siguiente link www.geogebra.org

CONTENIDOS CONCEPTUALES

UNIDAD 1 Conjuntos. Números reales.

Nociones de conjuntos. Operaciones con conjuntos: unión, intersección y diferencia de conjuntos. Conjuntos numéricos. Representación gráfica en la recta real. Valor absoluto de un número real. Intervalos en la recta real. Relaciones de igualdad y de orden. Las propiedades básicas del álgebra. Operaciones en el conjunto de números reales: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación. Racionalización de denominadores. Notación científica.

UNIDAD 2 Expresiones algebraicas.

Expresiones algebraicas. Polinomios. Igualdad. Valor numérico. Operaciones con polinomios: Adición; multiplicación de un número real por un polinomio; sustracción; multiplicación; división, raíz de un polinomio, Teorema del resto, Regla de Ruffini, concepto de divisibilidad. Teorema Fundamental del Álgebra. Factorización. Diferentes casos de factoreo. Expresiones Racionales Polinómicas. Simplificación. Operaciones. Identidades. Ecuaciones. Ecuaciones lineales con una incógnita. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Ecuaciones fraccionarias.

UNIDAD 3 Trigonometría.

Introducción. Ángulos. Sistemas de medición. Relaciones trigonométricas de un ángulo. Resolución de triángulos rectángulos. Resolución de triángulos oblicuángulos. Teorema del seno. Teorema del coseno.

UNIDAD I

Conjuntos

Números reales

Al finalizar esta unidad, el alumno deberá ser hábil en:

- *Identificar los distintos tipos de números.*
- *Representar los números en la recta real.*
- *Distinguir relaciones de orden entre los números reales.*
- *Operar con números reales aplicando correctamente las propiedades de cada operación.*
- *Operar con números reales en la forma de notación científica.*
- *Aplicar los conocimientos aprehendidos en esta unidad en la resolución de situaciones problemáticas de la vida cotidiana.*

1.1 NOCIONES DE CONJUNTOS

Un **conjunto** es una colección de objetos que tienen una característica en común y éstos se denominan **elementos** o **miembros** del conjunto.

En aritmética y en álgebra los elementos de un conjunto por lo general son números. Cuando nos referimos a los conjuntos empleamos $\{\ \}$ para encerrar a los elementos (o una descripción de la característica común de los mismos) y el uso de las letras mayúsculas para nombrar los conjuntos. Los elementos se escriben separados por comas, pueden ir en cualquier orden y figuran una sola vez.
Ejemplos:

$A=\{\text{vocales del abecedario}\}$	Descripción verbal. Por comprensión
$A=\{a,e,i,o,u\}$	Listado. Por extensión.
$A=\{x/x \text{ es vocal}\}$	Notación constructor de conjunto. Por comprensión.

El símbolo $\in$ indica pertenencia de un elemento a un conjunto y $\notin$ significa que no pertenece. Si observamos los conjuntos dados anteriormente, $a \in A$ y se lee "a es un elemento del conjunto A; en cambio $b \notin A$ y se lee "b no es un elemento del conjunto A.

El cardinal de un conjunto es el número de elementos que posee. A tiene 5 elementos, por lo tanto, el cardinal de A es 5 y se simboliza $|A|=5$

Formas de describir un conjunto

- Descripción por extensión: se realiza nombrando todos los elementos del conjunto. Esto sólo puede hacerse cuando el cardinal del conjunto es finito.

Ejemplo: $A=\{1,3,5,7\}$

- Descripción por comprensión: se realiza especificando o enunciando una propiedad que identifique a todos los elementos del conjunto. En el caso que el cardinal sea muy grande o no es finito, es necesario emplear esta notación haciendo uso de una descripción.

Ejemplo: $A=\{x \in \mathbb{N} \ / \ x \ es \ impar \ y \ 1 \leq x \leq 7\}$.
Se lee: A es el conjunto cuyos elementos son los números naturales, impares y comprendidos entre el 1 y el 7 incluyendo ambos.

Conjunto referencial

Cuando hablamos, por ejemplo, del conjunto $\{1,2,3,4\}$ podemos decir que nos estamos **refiriendo** a elementos del conjunto $\mathbb{N}$ como **conjunto de referencia** o **conjunto referencial** de los números considerados. También podríamos haber dicho que nos estamos refiriendo a números naturales menores que 10, o a números naturales menores que 100. Es decir, tanto el conjunto $\mathbb{N}$, como el conjunto $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, como el conjunto $C = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 100\}$ pueden ser elegidos como conjunto de referencia al hablar del conjunto $\{1,2,3,4\}$

> Para elegir el conjunto referencial de una situación, bastará con que todos los elementos que se quieran considerar en esa oportunidad estén en el referencial elegido.

Igualdad de Conjuntos

> Los conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos y se denota A = B.

Ejemplo: $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -2 < x < 5\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x \leq 4\}$

Siendo $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, resulta que $A = B = \{-1,0,1,2,3,4\}$ puesto que ambos conjuntos tienen los mismos elementos.

Conjunto Vacío

> Es el conjunto que no tiene elementos y se lo denota con el símbolo: $\varnothing$

Ejemplo: $A = \{x: x\ es\ una\ persona\ mayor\ que\ su\ abuela\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z}: x\ es\ múltiplo\ de\ 3 \quad y \quad -1 < x < 2\}$. Definido el conjunto B de esta manera, no existe ningún número entero que cumpla la condición dada ya que los enteros comprendidos entre -1 y 2 son 0 y 1, los cuales no son múltiplos de 3.
Por lo tanto, $A = B = \{\ \} = \varnothing$.

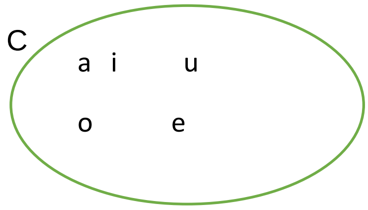
Conjunto Universal

> Es el conjunto de todos los posibles elementos del tema en estudio y su símbolo es U.

Ejemplo: El conjunto de todos los números reales.
El conjunto de los meses del año.

Representación gráfica de un conjunto

Para representar gráficamente a los conjuntos se suele utilizar los diagramas de Venn.
Ejemplo: $C = \{a, e, i, o, u\}$



Este tipo de representación brinda la ventaja de analizar con mayor claridad la relación entre dos o más conjuntos y favorece la obtención de conclusiones.

Subconjunto

Si todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B y se denota como:

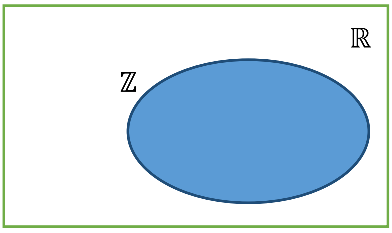
$$A \subseteq B \quad \text{ó}\, A \subset B \text{ (si } A \neq B)$$

Esto se lee: “A es subconjunto de B”, “A está incluido en B”, “A está contenido en B”, “B incluye a A” o “B contiene a A”.

Ejemplos:

- $$\left. \begin{array}{l} A = \{x / x \text{ es vocal}\} \\ B = \{x / x \text{ es letra del abecedario}\} \end{array} \right. \Longrightarrow A \subset B$$

- Los números enteros son un subconjunto de los números reales: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$



1.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

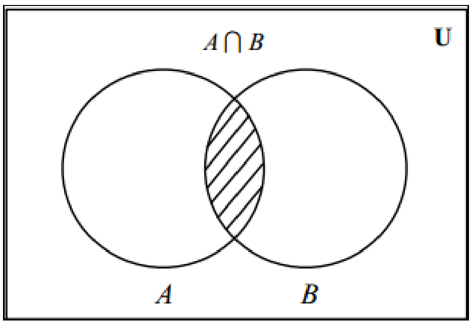
1. Intersección

Dados dos conjuntos A y B, se denomina intersección de A y B al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y que pertenecen a B.

O sea, se refiere a los elementos comunes de ambos conjuntos y se denota: $A \cap B$.

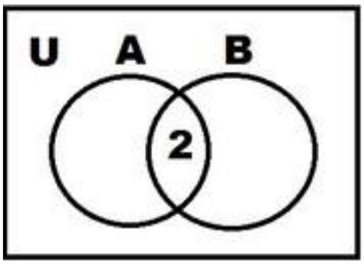
$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Gráficamente:



Ejemplo: Dados los conjuntos A y B, realizar la intersección de A y B.

$$A=\{2,3,5,7\} \qquad B=\{2,4,6,8\}$$
$$A\cap B=\{2\}$$



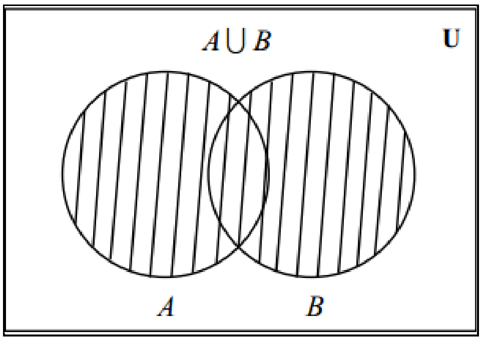
2. Unión

Dados dos conjuntos A y B, se llama unión de A y B al conjunto formado por los todos los elementos que pertenecen a A o que pertenecen a B.

Es decir, el conjunto resultante de la unión de A y B que se simboliza $A\cup B$, contiene los elementos que pertenecen a A o que pertenecen a B ó a ambos conjuntos.

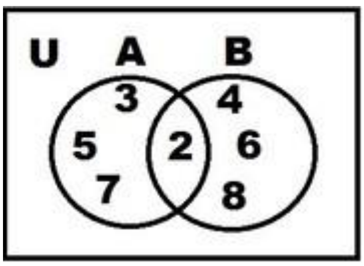
$$A\cup B=\{x\,/\,x\in A \text{ o } x\in B\}$$

Gráficamente:



Ejemplo:

$$A=\{2,3,5,7\} \qquad B=\{2,4,6,8\}$$
$$A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$$

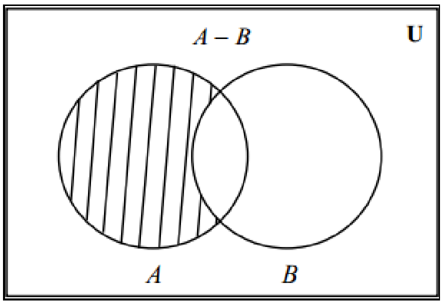


3. Diferencia

Dados dos conjuntos A y B, se denomina diferencia A – B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

$$A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Gráficamente:



Ejemplo:

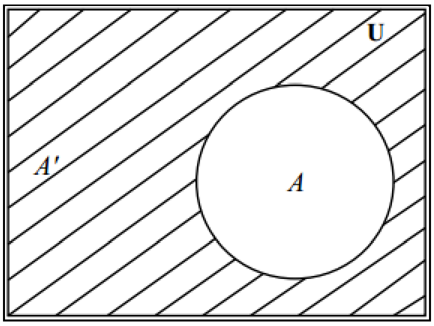
$$A = \{2,3,5,7\} \qquad B = \{2,4,6,8\}$$
$$A - B = \{3,5,7\}$$

4. **Complemento**

Si A es el subconjunto del conjunto universal U, se dice que el complemento de A (relativo a U), es el conjunto formado por todos los elementos de U que no pertenecen a A.

$$A^c = A' = \{x \in U / x \notin A\}$$

Gráficamente:



Ejemplo: Sea $U = \mathbb{N}$

Si$A = \{x \in \mathbb{N}: x \geq 10\}$entonces$A^c = A' = \{x \in \mathbb{N}: x < 10\}$

Propiedades

Propiedades de la inclusión

i) A $\subset$ A

ii) $\varnothing \subset A$

iii) $A \subset B \Rightarrow B \subset A$; sólo si $A = B$

iv) $A \subset B$ y $B \subset D \implies A \subset D$

Propiedades de la unión e intersección

i) Identidad	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap U = A$
ii) Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
iii) Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
iv) Asociativa	$(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D)$	$(A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$
v) Distributiva	$(A \cup B) \cap D =$ $(A \cap D) \cup (B \cap D)$	$(A \cap B) \cup D =$ $(A \cup D) \cap (B \cup D)$
vi) Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
vii)Complementaridad	$A \cup A^c = U$	$A \cap A^c = \varnothing$

1.3 NÚMEROS REALES

La noción de número y la acción de contar han estado al lado del hombre desde los tiempos prehistóricos. Ambos conceptos surgieron por la necesidad de supervivencia del hombre, como por ejemplo, acomodarse al medio ambiente, cuidar sus bienes, reconocer los ciclos de la naturaleza.
El hombre no es capaz de distinguir, directa e inmediatamente, los grupos mayores a 4 sin un aprendizaje previo. Esto era indispensable para la sobrevivencia del ser humano. Fue necesario, para él, realizar una representación simbólica del conteo y para ello utilizó su propio cuerpo, empleando los 10 dedos de su mano Dando, así, origen al sistema decimal, el cual no fue el único, sino el más conocido.
Con el correr del tiempo, el hombre fue evolucionando y necesitó expresarse a través de dibujos para indicar cantidades, manifestar peligros que enfrentaba, contar sobre su medio ambiente. La cantidad de símbolos iguales mostraba el número que pretendía expresar.
El siguiente cuadro expone brevemente qué logros alcanzaron distintos grupos humanos a lo largo de la historia:

Egipcios	Sistema de 10.
Sumerios y Babilonios	Sistema de 10 y 60, y fueron quienes comenzaron a medir el tiempo, como actualmente lo conocemos -60 minutos, 60 segundos-, y la partición del círculo en 360º.
Mayas, Aztecas y Celtas	Sistema de 20 porque contaban los dedos de las manos y los pies.
Romanos	Inicialmente tenían un sistema de 5, es decir que sólo se contaba con una mano. Luego pasaron al sistema de 10 gracias a la influencia que tuvo Egipto en la cultura romana

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>Uno</td><td>´</td></tr>
<tr><td>Dos</td><td>´´</td></tr>
<tr><td>Tres</td><td>´´´</td></tr>
<tr><td>Veinte</td><td>´´´´´´´´´´
´´´´´´´´´´</td></tr>
</table>
</td>
<td>Surgió entonces la representación pictórica de los números, los cuales consistían en una consecución de líneas o puntos consecutivos. Un sistema que para contabilizar hacía muy difícil la lectura rápida de los números, a diferencia de los grabados que se referían a los objetos que estaban representando. Por ende, comenzaron a separar las líneas en grupos de diez. Sin embargo, la contabilización seguía siendo de difícil lectura.</td>
</tr>
</table>

La evolución de la escritura inició su notabilidad en la historia de los números. Los primeros grabados o dibujos de las cavernas que denominamos pictogramas se transformaron en ideogramas, es decir, símbolos con significados del objeto representado.

Este tipo de escritura carecía de sonido, era de carácter pictográfico, ideográfico o combinación de ambos. Ejemplos de esta forma de escritura son: jeroglíficos egipcios, símbolos de escritura japonesa y china, maya, azteca y escritura cuneiforme de semitas.

En el 1800 a.C., aproximadamente, apareció la escritura acrofónica que supuso la utilización de pictogramas e ideogramas para expresar sólo el primer sonido de la palabra significada; así alrededor del año 1600 a.C. surgió el alfabeto semítico, del cual años más tarde, resultó el alfabeto griego.

El alfabeto antiguo en el 1400 a.C., constaba de treinta signos que incluía diferentes lenguas como la sumeria, acadia e hitita, entre otras. Con el transcurso del tiempo este alfabeto se simplificó a 22 signos.

A lo largo de la historia el alfabeto fue evolucionando: del arameo, se pasó al sirio (Persia); el alfabeto Brhami en India originó otros en el Tibet, Indochina e Indonesia: y el nabateo que se convirtió en cúfico, base de los alfabetos árabes actuales.

Ninguno de estos alfabetos que se utilizan en la actualidad tienen vocales, las cuales se indican por puntos y rayas, como por ejemplo: el alfabeto árabe y el hebreo.

Tomando la escritura de los fenicios, los griegos emplearon signos guturales para representar las vocales y dieron origen al alfabeto arcaico, en el cual el lenguaje escrito era muy parecido al lenguaje hablado.

Hacia el año 800 a.C. los griegos aislaron las vocales de las consonantes y las escribieron por separado. Este alfabeto que deriva de las dos primeras letras griegas: alpha y beta, llegó a los etruscos y luego a los latinos quienes lo difundieron por Europa.

Al mismo tiempo, el simbolismo de los números se fue desarrollando. Los egipcios inventaron un sistema de representación aditiva que fue adoptado por culturas como la sumeria, hitita, cretense, hebrea, griega y romana.

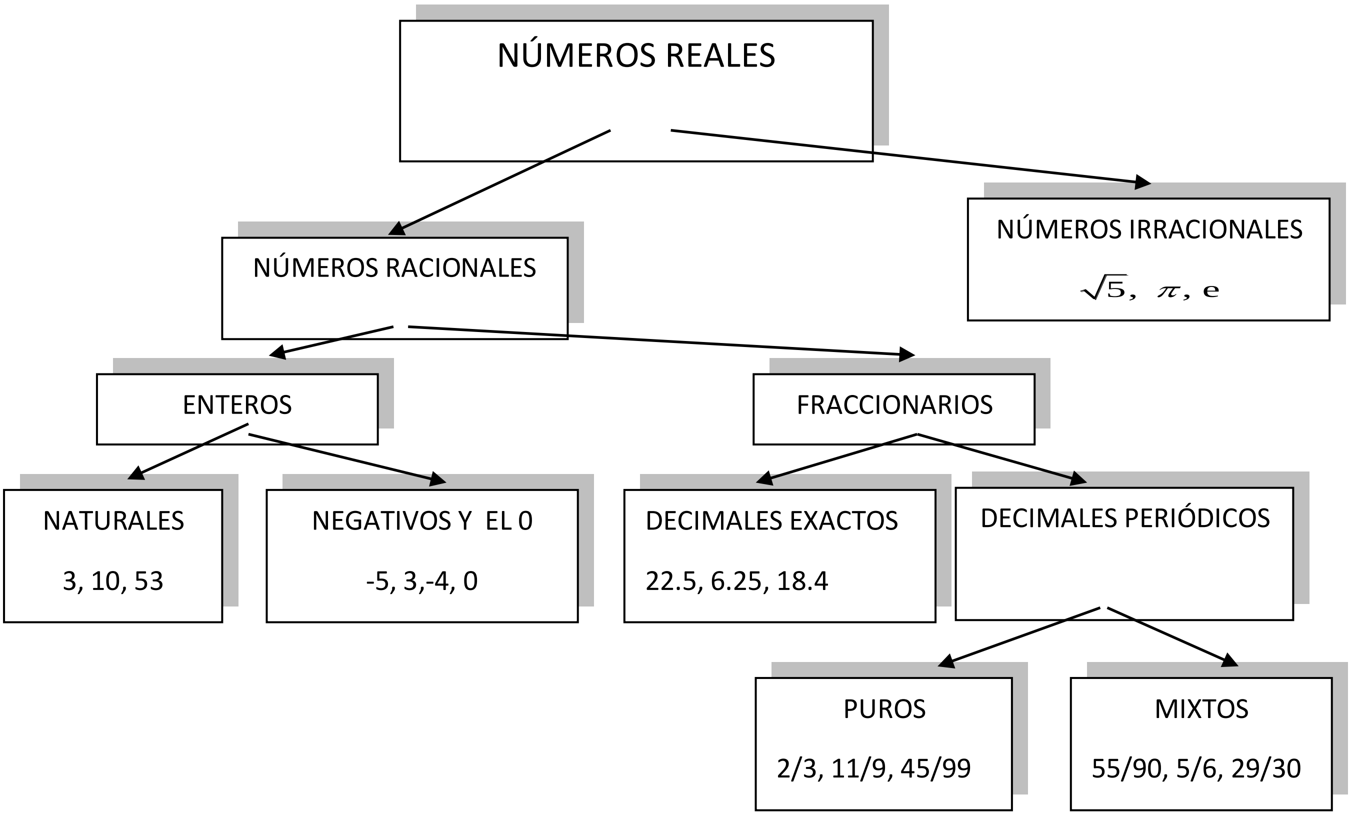
Los griegos realizaron un gran avance tomando el sistema de numeración egipcio y lo adecuaron a sus símbolos hacia el 600 a.C. “Utilizaron trazos verticales para representar los números hasta el 4, y letras para el 5 (penta), 10 (deka), 100 (hekatón) y 1.000 (Khiloi), convirtiéndose en un sistema acrofónico en el que las letras que representaban al número correspondían con la inicial de la palabra con la que se les denominaba. Así mismo, los símbolos del 50, 500 y 5.000 se obtenían añadiendo el signo 10, 100 y 1.000 al interior del 5, utilizando la multiplicación.”

A medida que fue pasando el tiempo, este sistema de numeración fue sustituido por el jónico. Este sistema utilizaba letras del alfabeto griego y otros símbolos. Así, los números se asemejaban a palabras y también las letras empezaron a relacionarse a un valor establecido, dando origen a la numerología dialéctica, que estudia la relación entre

los números y las palabras para explicar el desarrollo de las leyes de la naturaleza, de la sociedad y del pensamiento humano. Esto influyó en las culturas árabe y hebrea.
Sólo los sacerdotes de todas las culturas tenían este saber por las limitaciones para efectuar operaciones matemáticas con esta manera de representación de los números. Siglos después, desde aproximadamente 2200 años, los hindúes desarrollaron el sistema de símbolos que conocemos en la actualidad, a saber: "el uno lo representaban como 1; el dos, 2; el tres, 3; el cuatro, 4; cinco, 5; el seis, 6; el siete, 7; el ocho, 8 y el nueve, 9; más la invención del cero que sólo la realizaron los mismos hindúes por el año 500, quienes lo denominaban zunya cuyo significado es "vacío"."
El descubrimiento del uno significó un gran adelanto, ya que no se prestaría a confusión los números tales como 35 a 305 o 3.005.
Fueron avances muy importantes. Sin embargo, pasaron dos siglos para que este sistema fuese implementado en Europa definitivamente, lugar en el cual la herencia romana había transmitido sus propios números.

1.4 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Cuando el hombre tuvo la necesidad de contar y ordenar, utilizó los números 1,2,3,4,5,6,… que denominamos ***Números Naturales*** y los representamos con el símbolo$\mathbb{N}$.
Con este conjunto de números podemos realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación con exponente natural, radicación, siempre y cuando al ejecutar una de esas operaciones obtengamos como resultado otro número natural.
Pero existen ciertas restas como 9 – 12 que no da un número natural, aparecen aquí los ***Números Enteros*** que se denota con la letra$\mathbb{Z}$. Este conjunto está formado por los naturales, los números negativos y el cero.
Si realizamos la siguiente operación entre dos números enteros: 8/4, da otro entero 2; pero 8/3 no da un número entero. Entran en juego aquí los ***Números Racionales*** (aquellos que se pueden expresar como un cociente $\frac{a}{b}$donde $b \neq 0$ y ambos $a, b\ \in \mathbb{Z}$) o ***Fraccionarios*** (aquellos que se pueden expresar como un cociente $\frac{a}{b}$donde $b \neq 0$ y ambos $a, b\ \in \mathbb{N}$)que se simbolizan con la letra$\mathbb{Q}$.
Los números fraccionariospueden expresarse como números decimales, los podemos clasificar en decimales exactos y decimales periódicos; por ejemplo, 1/2 y 5/3, respectivamente. Cada unode estos decimales les corresponde una fracción determinada que usted ya ha estudiado en la escuela secundaria.
Los decimales exactos son aquellos que poseen un número finito de cifras decimales (19/5 = 3,8) y los periódicos tienen infinitas cifras decimales que se repiten (7/9 = 0,7777….).Éstos últimos se pueden subdividir en puros y mixtos. Los puros tienen solamente cifras decimales que se repiten (4/3 = 1,3333..), en cambio los mixtos, tienen cifras que se no se repiten y otras que si (53/90 = 0,58888….)
Las expresiones como $\sqrt{5}$ o $\sqrt[3]{-5}$, no se pueden representar como un cociente de dos números enteros, ya que son números decimales con infinitas cifras sin repetir, lo mismo ocurre si se trabaja con el número π= 3,1416…. o el número neperiano e = 2,7182…. .El conjunto de números cuya parte decimal no es exacta ni periódica recibe el nombre de ***Irracionales*** y se simbolizan con la letra $\mathbb{I}$.
La unión entre el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales constituyen el conjunto de los ***Números Reales*** que se denotan con la letra$\mathbb{R}$.



EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

En muchas ocasiones puede resultar conveniente expresar un número fraccionario como un decimal o viceversa. Para expresar una fracción como un número decimal, es suficiente con dividir el numerador entre el denominador.
Para expresar un número decimal, que son números racionales (conjunto que se denota $\mathbb{Q}$) como fracción, es necesario reconocer que tipo de decimal es el que se puede expresar como fracción. Es decir, los números decimales que podemos expresar como fracción son los números decimales exactos, como $7,3$ o $0,527$, y los números decimales en cuya expresión decimal se repite a partir de un cierto momento una misma cantidad de cifras, denominada período, como $23,\widehat{4}$ o $5,43\widehat{78}$. Los números decimales que no podemos expresar como fracción son los números irracionales, que suele denotarse como $\mathbb{I}$ o $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Algunos ejemplos de estos números son el número π, el número e o el número $\sqrt{2}$. La expresión decimal de estos números (como la de todos los irracionales) es infinita y no periódica. Por ello no pueden expresarse como una fracción.
La fracción que se obtiene de cada número decimal no va a ser en general una fracción irreducible, es decir, cuando ya se tenga la fracción asociada al número decimal podremos encontrar una fracción equivalente a la obtenida que será irreducible dividiendo numerador y denominador por el máximo común divisor de ambos.

1.- Número decimal exacto

Este es el caso más sencillo de todos. El procedimiento para hallar la fracción buscada es:

-Numerador: Número completo sin coma
-Denominador: Un uno seguidos de tantos ceros como cifras decimales tenía el número inicial

Si la fracción obtenida no es irreducible se la puede simplificar como se mencionó anteriormente dividiendo por el máximo común divisor de numerador y denominador.

El siguiente ejemplo ilustra la justificación de la técnica empleada:

Sea $x = 4,1347$. Se multiplica a ambos miembros por 1000 y queda:

$$10000x = 41347$$

Despejando x se obtiene

$$x = 4,1347 = \frac{41347}{10000}$$

Al ser una fracción irreducible,es la fracción buscada.

Por el mismo procedimiento, para este otro número se llega a la siguiente fracción:

$$0,18 = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$$

Como en este caso la fracción obtenida no es irreducible,se la simplifica dividiendo entre 2 numerador y denominador.

2.- Número decimal periódico puro

En este caso la fracción buscada es la siguiente:

-Numerador: *Parte entera del número inicial junto con el período – (menos) parte entera del número inicial*
-Denominador: *Tantos nueves como cifras tenga el período*

Si la fracción obtenida no es irreducible también se la puede simplificar. El siguiente ejemplo ilustra la justificación de la técnica empleada:

Sea $x = 1,\widehat{8}$. Se multiplica a ambos miembros por 10 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene el período) y después restamos x al resultado. Queda:

$$10x - x = 18,\widehat{8} - 1,\widehat{8} = 17$$

Entonces $9x = 17$. Al despejar x se llega al resultado esperado:

$$x = 1,\widehat{8} = \frac{17}{9}$$

Como lo que se obtiene es una fracción irreducible, es la fracción buscada.

De la misma forma, para este otro número se llega a lo siguiente:

$$13,\widehat{273} = \frac{13273 - 13}{999} = \frac{13260}{999} = \frac{4420}{333}$$

Como en este caso se obtiene una fracción no irreducible, se la simplifica dividiendo por 3 numerador y denominador.

3.- Número decimal periódico mixto

En este caso la fracción quedaría de la siguiente manera:

-Numerador: Parte entera junto con parte no periódica junto con período – (menos) parte entera junto con parte no periódica
-Denominador: Tantos nueves como cifras tiene el período seguidos de tantos ceros como decimales no periódicos teníamos

El siguiente ejemplo ilustra la justificación de la técnica empleada:

Sea $x = 0,3\widehat{4}$. Se multiplica x por 10 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica) y se resta x:

$$10x - x = 3,\widehat{4} - 0,3\widehat{4} = 3,1$$

Entonces que $9x = 3,1$. Se vuelve a multiplicar por 10 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal que ha quedado):

$$90x = 31$$

Despejando x se obtiene:

$$x = 0,3\widehat{4} = \frac{31}{90}$$

Como la fracción obtenida es irreducible, es la fracción buscada.

Otro ejemplo:

Sea $x = 12,23\widehat{7}$. Se multiplica a ambos miembros por 100 (un uno seguidos de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica) obteniendo $100x = 1223,\widehat{7}$. Se multiplica ahora por 10 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte periódica que nos queda) llegando a $1000x = 12237,\widehat{7}$. Se toma el número por el que se multiplicó a x en el primer paso, que en este caso es 100, lo multiplicamos por x y se lo restamos a lo que habíamos obtenido:

$$1000x - 100x = 12237,\widehat{7} - 1223,\widehat{7} = 11014$$

Nos queda entonces:

$$900x = 11014$$

De donde se obtiene el resultado al despejar x:

$$x = 12,23\widehat{7} = \frac{11014}{900} = \frac{5507}{450}$$

Como la fracción obtenida no era irreducible se la simplifica dividiendo por 2 numerador y denominador.

Un ejemplo más:

Sea $x = 31,775\widehat{5692}$. Se multiplica ambos miembros por 1000 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica) y queda $1000x = 31775,\widehat{5692}$. Ahora multiplicamos por 10000 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene el período)se obtiene $10000000x = 317755692,\widehat{5692}$. Se toma ahora el número por el que se multiplicó en el primer paso, 1000 en este caso, y se lo multiplicapor x, que luego se le resta a los que se había obtenido:

$$10000000x - 1000x = 317755692,\widehat{5692} - 31775,\widehat{5692} = 317723917$$

Se obtiene

$$9999000x = 317723917$$

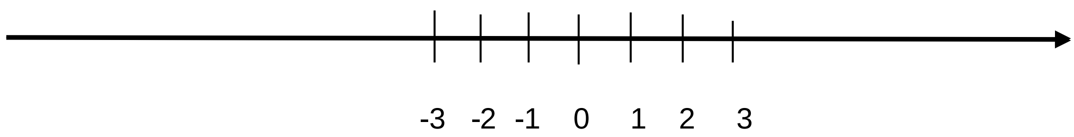
Despejando x:

$$x = 31,7755\widehat{692} = \frac{317723917}{9999000}$$

Como la fracción obtenida es irreducible, es la fracción buscada.

1.5 REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL

Es posible establecer una relación biunívoca (1-1) entre el conjunto de los números reales y los puntos de una recta, así el conjunto de los números reales se puede representar gráficamente sobre una recta denominada “recta real” o “recta numérica”.
Para construir una recta numérica, se traza una recta horizontal, se elige un punto arbitrario al cual se le asigna el número cero (0) y se escoge un segmento unidad para tabular la recta. Este punto que representa al cero, divide la recta en dos semirrectas opuestas, a la derecha generalmente se ubican los números reales positivos y a la izquierda los números reales negativos.
A cada número real le corresponde un único punto de la recta real y a cada punto de la recta numérica representa un único número real.



1.6 VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

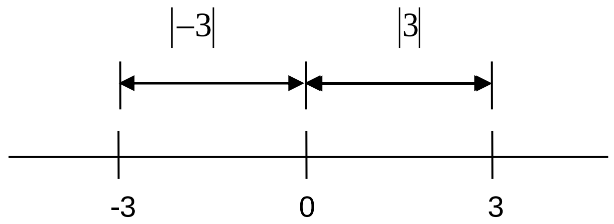
La notación $|x|$ se emplea para expresar el valor absoluto de un número real.

$$|x| \underset{def}{=} \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Geométricamente, el valor absoluto de x es la distancia entre el punto de la recta representativo del número x y el punto que representa el cero.

<u>Ejemplo</u>:

$|3| = 3$ $\qquad$ $|-3| = -(-3) = 3$



Otra forma de expresar $|x|$ es $|x| = \sqrt{x^2}$

Ejemplo:

$Si \;\; x^2 = 49, \; \sqrt{x^2} = 7$

$|x| = 49, \text{ entonces } \; x = 7 \;\text{ o }\; x = -7$

1.7 ORDEN Y NOTACIÓN DE INTERVALO

Al representar los números reales en la recta numérica, se puede observar que este conjunto es ordenado. Es decir, que dados dos números reales a y b, se puede determinar siempre una relación de igualdad, menor o mayor. Esto significa que se comprueba una de las siguientes desigualdades: $a < b \;\text{ o }\; a \le b \;\text{ o }\; a > b \;\text{ o }\; a \ge b$

Orden de los números reales

Sean a y b cualesquiera dos números reales.

Símbolo	Definición	Se lee
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b
$a \ge b$	$a - b$ es positivo o cero	a es mayor o igual que b
$a \le b$	$a - b$ es negativo o cero	a es menor o igual que b

Son símbolos de desigualdades: $>, \; <, \; \ge, \; \le$.

Una propiedad importante para comparar dos números reales es:

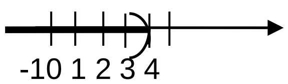
Ley de tricotomía

Sean a y b cualesquiera dos números reales. Sólo una de las siguientes expresiones es verdadera:

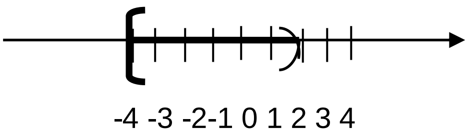
$$a < b, \quad a = b, \quad o \quad a > b.$$

Es posible utilizar las desigualdades para expresar distintos intervalos de números reales. Por ejemplo:

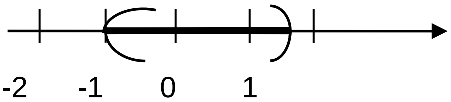
a) $x < 3$ la variable puede tomar cualquier valor de todos los números reales menores que 3.



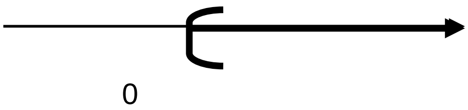
b) $-4 \le x < 2$, expresa que la variable x puede tomar cualquier valor de todos los números reales entre -4 y 2 incluyendo al -4.



c) $-1 < x < 1{,}5$ respresenta el intervalo de todos los números reales que estan entre -1 y 1,5.



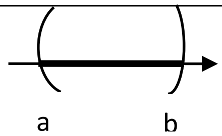
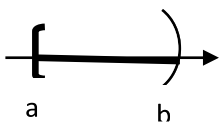
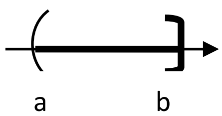
d) $x > 0$ es el intervalo o el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a cero.



Existen distintos tipos de intervalos o conjuntos numéricos que se pueden representar con desigualdades, analíticamente o gráficamente**.** Pueden ser acotados o no acotados.

<u>Intervalos acotados de números reales</u>

Sean a y b números reales donde $a < b$.

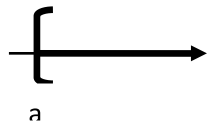
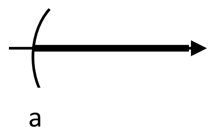
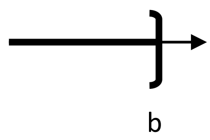
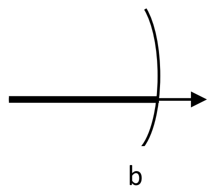
Notación de intervalo	**Tipo de intervalo**	**Notación de desigualdades**	**Gráfica**
$[a,b]$	Cerrado	$a \leq x \leq b$	
(a,b)	Abierto	$a < x < b$	
$[a,b)$	Semi-abierto o semi-cerrado	$a \leq x < b$	
$(a,b]$	Semi-abierto o semi-cerrado	$a < x \leq b$	

Los números a y b son los extremos de cada intervalo.

Los símbolos $-\infty$ (infinito negativo) y ∞ (infinito positivos), no son números reales, pero nos brindan la posibilidad de emplear la notación de intervalos no acotados.

<u>Intervalos no acotados de números reales</u>

Sean a y b números reales.

Notación de intervalo	**Tipo de intervalo**	**Notación de desigualdades**	**Gráfica**
$[a,\infty)$	Cerrado por izquierda y no acotado por derecha	$x \geq a$	
(a,∞)	Abierto por izquierda y no acotado por derecha	$x > a$	
$(-\infty,b]$	Cerrado por derecha y no acotado por izquierda	$x \leq b$	
$(-\infty,b)$	Abierto por derecha y no acotado por izquierda	$x < b$	

Cada uno de estos intervalos tiene exactamente un extremo a o b.

1.8 ORDEN DE OPERACIONES

Para resolver operaciones aritméticas, se debe respetar ciertas reglas:

1.- Primero resolver todo lo que esté dentro de símbolos de agrupación.
2.- Evaluar las expresiones exponenciales.
3.- Hacer todas las multiplicaciones y divisiones en orden de izquierda a derecha.
4.- Hacer todas las sumas y restas en orden de izquierda a derecha.

Ejemplo: $$\frac{4(4-6)-5.3+4^2}{2^3+23^0}=\frac{4(-2)-5.3+16}{8+1}=\frac{-8-15+16}{9}=\frac{-7}{9}=-\frac{7}{9}$$

En los números reales se define la relación de igualdad y se comprueban para la misma las propiedades: reflexiva, simétrica, transitiva y uniforme.

1) **PROPIEDAD REFLEXIVA**: Todo número real “a” es igual a sí mismo. $\forall a \epsilon \mathbb{R}, a = a$

2) **PROPIEDAD SIMÉTRICA**: Para todo par de números reales “a” y “b” si “a” es igual a “b”, entonces “b” es igual a “a”. $\forall\ a, b\ \in \mathbb{R}, a = b \Rightarrow\ b = a$

3) **PROPIEDAD TRANSITIVA**: Si un número real “a” es igual a un número real “b” y “b” es igual al número real “c”, entonces a = c.$\forall a, b, c\ \epsilon \mathbb{R}, si\ a = b\ y\ b = c \Rightarrow\ a = c$

4) **PROPIEDAD UNIFORME**:

- **Para la adición**: Si a ambos miembros de una igualdad se suma un mismo número se obtiene otra igualdad. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ si\ a = b \Rightarrow a + c = b + c$
- **Para la multiplicación**: Si se multiplica a ambos miembros de una igualdad por un mismo número se obtiene otra igualdad.$\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ si\ a = b \Rightarrow a.c = b.c$

Se define la **diferencia** entre números reales como la suma del opuesto, dado que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists(-x) \in \mathbb{R}\ tal\ que\ x + (-x) = 0$$

De este modo $\forall a, b \in \mathbb{R}, a - b = a + (-b)$

Por ejemplo: $4 - \frac{1}{2} = 4 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$

Ley de anulación del producto

$\forall a, b \in \mathbb{R}\ si\ a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ lo cual significa que puede ocurrir una de éstas tres casos:

$$a = 0 \wedge b \neq 0$$

$$a \neq 0 \wedge b = 0$$

$$a = 0 \wedge b = 0$$

1.9 OPERACIONES CON NÚMEROS REALES. PROPIEDADES

Pararealizar operaciones con los números reales, se deben aplicar las propiedades que se cumplen en cada tipo de operación.

Es conveniente señalar que lo importante de estas propiedades no es su memorización, sino que las comprenda para poder utilizarlas cuando sea necesario (por ejemplo para simplificar o resolver ecuaciones) y que reconozca cuando no es posible realizar alguna operación.

Reglas de los signos

En la multiplicación y en la división, si los números tienen el mismo signo, el resultado es de signo positivo, si los números tienen signos opuestos, el resultado es de signo negativo.

Propiedades de la adición

- *Ley de cierre:*Si se suman dos números reales, entonces el resultado es otro número real. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}\ /\ a + b = c$
- *Conmutativa*: Al sumar dos números reales el orden en que se realice la misma, no afecta el resultado. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$
- *Asociativa:* Si a, b y c son tres números reales, para sumarlos se pueden asociar de a dos, como resulte conveniente. $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a + (b + c) = (a + b) + c$
- *Existencia del elemento neutro:*Existe un elemento neutro que al sumarlo con cualquier otro número real, siempre da como resultado el otro número real.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists 0 \in \mathbb{R}\ /\ a + 0 = 0 + a = a$$

- *Existencia del inverso aditivo u opuesto:* Para todo número real existe un número real opuesto, tal que al sumarlos da como resultado el elemento neutro.
  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}/\ a + (-a) = (-a) + a = 0$

Propiedades de la multiplicación

- *Ley de cierre:* Si se multiplican dos números reales, entonces el resultado es otro número real$\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}/\ a.b = c$
- *Conmutativa:*Al multiplicar dos números reales el orden en que se realice la misma, no afecta el resultado. $\forall a, b\ \in \mathbb{R}, a.b = b.a$
- *Asociativa:*Si a, b y c son tres números reales, para multiplicarlos se pueden asociar de a dos, como resulte conveniente$\forall a, b, c\ \in \mathbb{R}, a.(b.c) = (a.b).c$
- *Existencia del elemento neutro:*Existe un elemento neutro que al multiplicarlo con cualquier otro número real, siempre da como resultado el otro número real.
  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists 1 \in \mathbb{R}/\ a.1 = 1.a = a$
- *Existencia del recíproco:*Todo número real a $\neq 0$ tiene su inverso multiplicativo o recíproco tal que al multiplicarlos da como resultado el elemento neutro.
  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \frac{1}{a}/\ a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a\ = 1$

Propiedad distributiva del producto respecto a la suma

- Sean a, b y c tres números reales, entonces
  $(a \pm b).c = a.c \pm b.cyc.(a \pm b) = c.a\ \pm c.b$

Diferencia o resta

La diferencia o resta de números reales se define a partir de la definición de la adición o suma: $\forall a, b\ \in\ \mathbb{R}\ a - b = a + (-b)$

Cociente

El cociente se define a partir de la definición de producto $\forall a, b\ \in \mathbb{R}\ a{:}b = a.\frac{1}{b}$

Potenciación

Sea a un número real, se define la potencia de a como:

$$a^n = \underbrace{a.a.a \ldots}_{\text{n-veces}}\ si\ n > 1, \qquad donde\ \ n \in \mathbb{N}$$

$a^1 = a$

$a^0 = 1$ Para todo número real $a \neq 0$.

a Recibe el nombre de “base” y n “exponente”.

Propiedades de la potenciación

- Distributiva: la potenciación es distributiva respecto al producto $(a.b)^n = a^n.b^n$ y a la división $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ donde $b \neq 0$

- Potencia de igual base: si se multiplican dos o más potencias que tienen igual base, entonces el resultado es otra potencia de igual base donde el exponente es la suma de los exponentes de los factores. $a^n.a^m = a^{n+m}$

- Potencia de potencia: la potencia de una potencia, es igual a la misma base elevanda al producto de los exponentes. $(a^n)^m = a^{n.m}$

- Si el exponente es negativo, entonces $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Radicación

La raíz n-ésima de un número real a, denotada como $\sqrt[n]{a}$ es igual b, si b^n da como resultado el número a.

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y sólo si } b^n = a$$

a recibe el nombre de radicando, n es el índice, y el signo $\sqrt{\ }$ se denomina radical.
Nota: cuando n es par, $a \geq 0$ puesto que ningún número negativo (b) elevado a una potencia par da como resultado otro número negativo. Y cuando n es impar, a es cualquier número real.

Ejemplos:

$\sqrt{16} = 4$ si y solo si $4^2 = 16$

$\sqrt{-16} =$ ¿es posible?

$\sqrt[3]{8} = 2$ si y solo si $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{-8} = -2$ si y solo si $(-2)^3 = -8$

El segundo caso de radicación no es posible, ya que ningún número real distinto de cero elevado al cuadrado, da como resultado -16, siempre dará un número positivo. Por lo tanto, no se puede calcular $\sqrt[n]{a}$ con n par y $a < 0$, no tiene solución en el campo de los números reales. Es decir, la radicación no es siempre posible en$\mathbb{R}$. Y dado el caso mencionado, la radicación no es cerrada en$\mathbb{R}$.
No siempre es posible simplificar un radical con un radicando negativo. Por ejemplo:

$\sqrt[8]{4^4} = \sqrt[8]{256} = 2$
$\sqrt[8]{4^4} = \sqrt{4} = 2$ los resultados coinciden.

$\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$

$\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4\frac{1}{2}]{(-4)^{2\frac{1}{2}}} = \sqrt{(-4)} =$ no tiene solución en los reales

$\sqrt[5]{(-2)^5} = \sqrt[5]{-32} = -2$

$\sqrt[5]{(-2)^5} = \sqrt[5\frac{1}{5}]{(-2)^{5\frac{1}{5}}} = -2$ los resultados coinciden.

$\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

$\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6\frac{1}{2}]{(-8)^{2\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{(-8)} = -2$ los resultados no coinciden.

Esto se puede sintetizar diciendo

$$n \text{ es impar } \sqrt[n]{a^n} = a$$
$$n \text{ es par } \sqrt[n]{a^n} = |a|$$

Si el índice es impar, la raíz real es única y del mismo signo que el radicando.
Si el índice es par y el radicando positivo, la raíz real es también única y por definición positiva.

Observaciones:

- Por definición, la radicación admite un único resultado.
- La radicación no es cerrada en$\mathbb{R}$.
- Es importante recordar que:

$$\boxed{\begin{array}{l} n \text{ es impar } \sqrt[n]{a^n} = a \\ n \text{ es par } \sqrt[n]{a^n} = |a| \end{array}}$$

Propiedades de la radicación

- La n-ésima raíz de un producto es el producto de las n-ésimas raíces de los factores

$$\sqrt[n]{a\ .\ b} = \sqrt[n]{a}\ .\ \sqrt[n]{b}$$

- La raíz n-ésima de un cociente, es el cociente de las raíces n-ésimas del dividendo y del divisor

$$\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

- La m-ésima raíz de la n-ésima raíz de un números igual a la (m.n)-ésima raíz de dicho número

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

Potencia con exponente racional

Sea un número racional$\frac{m}{n}$ con $n \geq 2$, si a es un número real tal que $\sqrt[n]{a}$ está definida entonces: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Ejemplos

Nótese que las propiedades de potencias con exponente racional son las mismas que las potencias de exponente natural.

a) $5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3}$

b) $\frac{\sqrt{243}}{\sqrt[6]{27}} = \frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt[6]{3^3}} = \frac{3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{3}{6}}} = \frac{3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$

1.10 RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

En el caso de obtener fracciones con números irracionales en el denominador, es posible transformarlas en fracciones equivalentes con denominadores racionales, empleando el proceso de racionalización, que consiste de multiplicar y dividir la correspondiente fracción por una expresión adecuada, que permita eliminar la raíz del denominador.
A través de ejemplos se verán algunas reglas para racionalizar, aunque cada vez, se utiliza menos el proceso de racionalización por uso de calculadoras y computadoras.

Ejemplo 1: Se ha multiplicado el numerador y denominado por $\sqrt{3}$, así la expresión resultante es equivalente a la primera.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2.\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 2: Se ha multiplicado el numerador y denominado por $\sqrt[5]{2^2}$para obtener $\sqrt[5]{2^5}$ y poder eliminar la raíz del denominador

$$\frac{4}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{4}{\sqrt[5]{2^3}}\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{4\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3.2^2}} = \frac{4\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{4\sqrt[5]{2^2}}{2} = 2\sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$$

En general:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m.b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = a\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

Ejemplo 3:

El siguiente procedimiento es para los denominadores del tipo:
$\sqrt{a} \pm \sqrt{b},\ a \pm \sqrt{b},\ \sqrt{a} \pm b$. Se multiplica numerador y denominador por la expresión qe resulte más conveniente, a fin de obtener una diferencia de cuadrados en el denominador.

$$\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{6}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2-3}=\frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{(-1)}=-6\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$$

$$\frac{5}{2+\sqrt{3}}=\frac{5}{\left(2+\sqrt{3}\right)}\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3}=\frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{1}=5\left(2-\sqrt{3}\right)$$

1.11 NOTACIÓN CIENTÍFICA

Cuando se debe trabajar con números muy grandes o muy pequeños, como ocurre muy frecuentemente en ciencia, tecnología, ingeniería, se utiliza una forma de expresar los números que se denomina notación científica.
La notación científica es una aplicación de la potenciación y consiste en expresar las cifras decimales como producto de un número decimal y una potencia de base diez:

$N\ 10^n$

N es un número real de una sola cifra entera distinta de cero, tal que $1 \leq N < 10$ y n es un número entero.
La ventaja de emplear esta notación, es que evita la dificultad de trabajar con varias cifras decimales y permite percibir el orden de magnitud de una cantidad por el exponente n. Por ejemplo: Masa de la tierra: $5{,}98\ 10^{24}$ kg; Edad de la tierra: $4\ 10^9$ años; Masa de un electrón: $9{,}11\ 10^{-31}$ kg; Longitud de una célula típica: $5\ 10^{-5}$ m

Los números reales expresados en notación científica pueden operarse sin dificultad, tanto la suma, como la resta, la multiplicación, la división y la potencia de potencia.
Aquí hay un ejemplo de cómo es posible operar con números muy grandes o muy pequeños empleando las propiedades de la potenciación.

$$\frac{(2{,}5\ 10^8-4{,}2\ 10^8).(3{,}4\ 10^{-5}+9{,}1\ 10^{-5})}{(5{,}28\ 10^4)^2}=\frac{(2{,}5\ 10^8-4{,}2\ 10^8).(3{,}4\ 10^{-5}+9{,}1\ 10^{-5})}{(5{,}28\ 10^4)^2}=\frac{-2{,}125\ 10^4}{2{,}78710^9}$$

$$=-4{,}02\ 10^{-5}$$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

Objetivos:

- Adquirir el concepto de conjunto.
- Identificar números naturales, enteros, racionales e irracionales y ubicarlos correctamente en la recta real.
- Ordenar los números reales, y establecer relaciones de igualdad y de orden entre ellos.
- Adquirir el concepto de valor absoluto e intervalo.
- Resolver correctamente las operaciones con números reales aplicando las propiedades.
- Aplicar apropiadamente el proceso de racionalización.
- Expresar los números reales en notación científica en el caso que sea necesario y operar con ellos bajo esta forma de notación científica.
- Resolver situaciones problemáticas pertinentes.

Actividad 1: Cuáles son los elementos de:

a) El conjunto de los días de la semana.
b) El conjunto de las estaciones del año.
c) Los números impares menores a 11.
d) Los números pares mayores a 10 y menores a 20.
e) Los números primos menores a 15.
f) Los números múltiplos de 5.
g) Los números impares entre 1 y 15, incluidos ambos.
h) El conjunto de los países limítrofes de Argentina.

Actividad 2: Colocar **V** ó **F** según lo afirmado sea verdadero o falso.

a) $6 \in \{ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9 \}$ **( )**

b) $y \notin \{ \text{o, p, q, x} \}$ **( )**

c) $x \in \{ \text{o, p, q, y} \}$ **( )**

d) $\textit{Perú} \notin \{ \text{países de Europa} \}$ **( )**

e) $\textit{Amazonas} \in \{ \text{ríos de América} \}$ **( )**

f) $3 \in \{\text{números pares}\}$ **( )**

g) $\text{Re}\,\textit{sistencia} \notin \{\text{capitales de Argentina}\}$ **( )**

h) $7 \in \{\text{números primos}\}$ **( )**

Actividad 3: ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son: vacíos, unitarios, finitos, infinitos?

a) A = { x / x es día de la semana} ....
b) B = {vocales de la palabra vals} ....
c) C = { 1, 3, 5, 7, 9, ...} ....
d) D = { x / x es un habitante de la luna} ....
e) E = $\{x \in \mathbb{R}/\ x < 15\}$ ....
f) F = $\{x \in \mathbb{N}/\ 5 < x < 15\}$ ....
g) G = $\{x \in \mathbb{N}/x > 15\}$ ....
h) H = $\{x \in \mathbb{R}/\ x = x\}$ ....
i) I = { x / x es presidente del Océano Pacífico} ....
j) J = { x / x es número de cabellos total de los habitantes del Perú } ....

Actividad 4:

(I) Decir cuáles de estos conjuntos son iguales:

$A = \{1,2,3\}$ E= $\{x / x \text{ es letra de la palabra "cosa"}\}$

$B = \{4,2,3\}$ F= $\{x / x \text{ es letra de la palabra "caso"}\}$

$C = \{3,2,1\}$ G= $\{x / x \text{ es letra de la palabra "acaso"}\}$

$D = \{4,2,2,3\}$ H= $\{1,2,3,1\}$

(II) Decir cuáles de estos conjuntos son vacíos:

$A = \{x/\ xesletradelapalabratierra\}$	$E = \{x/\ xesla\ 31\ letradelalfabetoespañol\}$
$B = \{x/xesunapersonaquetiene\ 200\ años\}$	$F = \{x \in \mathbb{N}/5x = 0\}$
$C = \{x \in \mathbb{R}/x^2 < 0\}$	$G = \{x \in \mathbb{R}/x^2 + 1 = 0\}$
$D = \{\emptyset\}$	$H = \emptyset$

Actividad 5:

I) Siendo $A = \{a,b,c,d\}, B = \{a,b,1\}, C = \{1,2\}$, efectuar las operaciones entre conjuntos indicadas:

a. $A \cup B$
b. $B \cap C$
c. $A \cap C$
d. $C \cup C$
e. $B \cap B$
f. $(A \cup B) \cup C$
g. $(A \cup B) \cap C$
h. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

II) Utilizar diagramas de Venn para sombrear la operación que se indica en cada caso:

a. $(A \cup B) - C$
b. $(A \cap C) - B$
c. $(B \cap C)^c \cup A$
d. $(A \cup B \cup C)^c$

III) Simplificar las siguientes expresiones empleando las propiedades de la unión e intersección de conjuntos:

a. $A \cap (A \cup B) =$
b. $A \cup (A \cap B) =$
c. $B \cup (A - B) =$
d. $U \cup U =$
e. $U \cup \varnothing =$

Actividad 6:

Entre las plantas que figuran en el cuadro siguiente hay algunas que son árboles (A), otras que tienen fruto comestible (C), otras que cumplen con ambas condiciones y otras que no cumplen con ninguna. Completar el cuadro.

Plantas	A	C	$A \cap C$	$A \cup C$
Tulipán				
Duraznero				
Sauce				
Frutilla				
Álamo				
Maíz				

Actividad 7:

Una empresa vendedora de abonos orgánicos del suelo realiza una encuesta a 450 productores para saber las preferencias de sus clientes sobre Compost, Guano de la Isla y Musgo. Obtienen los siguiente datos: a 280 clientes gusta el Compost, a 270 el Guano de la Isla, a 200 el Musgo, 120 Compost y Guano de la Isla, 101 Compost y Musgo, 100 Guano de la Isla y Musgo y a 10 los tres abonos.
Determinar cuántos de ellos prefieren:
a) Al menos uno de los tres abonos,
b) sólo uno de los abonos,
c) como máximo uno de estos tres abonos.
d) exactamente dos abonos,
e) como mínimo dos de estos abonos,
f)los tres abonos.

Actividad 8: Marcar con una cruz a qué conjuntos de números pertenecen los siguientes números:

Nº	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	I	$\mathbb{R}$

-5					
π					
0					
$\sqrt{10}$					
$2\frac{1}{4}$					
$4,\widehat{3}$					
$\frac{5}{2}$					
$\frac{14}{90}$					
7					
$\frac{8}{9}$					
E					
$\frac{2}{5}$					
$0,75$					
$0,14\widehat{2}$					
$5\frac{2}{990}$					

Actividad 9: Determinar cuáles de los números no pertenecen a la clasificación dada:

Naturales: 2 0 3,4 π -2 8 100 1/9

Enteros: -3 4 0 e -13 1/3 $\sqrt{5}$ -1

Racionales: 5/9 -1/90 7/6 4/2 -5 8 $\sqrt[3]{8}$ -7

Irracionales: π $\sqrt{7}$ -2 0 1 0,34 8/9 e

Actividad 10: Ordenar de mayor a menor los siguientes números reales:

2 -6 0,75 $-\frac{3}{4}$ 0 $\sqrt{3}$ -6,12 $-6,1\widehat{2}$ $\frac{1}{2}$ 1,76

Actividad 11: Dados los siguientes números reales, determine a qué conjuntos numéricos pertenecen y ubíquelos en la recta real.

2,3 0 -1/7 0,85 $-3,\widehat{4}$ 2 -7/4

Actividad 12: Establecer relaciones de igualdad o desigualdad entre los números indicados:

a) $-2.......-8$ b) $5.......\frac{25}{5}$ c) $2,\widehat{5}........2,5$ d) $3\frac{9}{2}.......\frac{15}{2}$ e) $\frac{4}{9}.......\frac{5}{2}$

Actividad 13: Decir cuáles de los siguientes números racionales son iguales:

2,5 4,5 -2,5 -0,75 $\frac{5}{2}$ $4\frac{1}{2}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{9}{2}$ $2\frac{1}{2}$ $\frac{3}{27}$ $-\frac{3}{4}$ 0 $0,\widehat{1}$

Actividad 14:

a) Determinar el valor de x.

$|x| = 2$ $|x| = -1$ $|x| = 7$

b) Representar gráficamente cada uno de los números siguientes y sus opuestos: 4, 6, -2, 1, -5, 0, 9, ½, -3/4 , 5/2, -7/4

c) Completar el siguiente cuadro:

Desigualdades	Intervalo	Tipo de intervalo	Representación gráfica
$-1 < x < 4$			
$0 \le x \le 5$			
$x \ge \frac{5}{2}$			
$x \le -3$			
$\|x\| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$			
	$(8,10]$		
$\|x\| \ge 1 \Rightarrow x \le -1 \text{ o } x \ge 1$		-----------	
	$[-2,3]$		

	$(-\infty, 4]$		
	$(-2, \infty)$		
$x > -1$			

<u>Actividad 15</u>:

a) De los números 1, 2, 5, 8, 10, 11, ¿cuántos y cuáles son primos?
b) Cuál es el mayor número natural que divide exactamente a 18, 24 y 36?

c) ¿Cuántos elementos en común tienen los conjuntos de los divisores del 18 y del 36?

d) Si Cristóbal Colón nació en 1436, descubrió América en 1492, y murió 14 años después, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?:

I) Falleció en 1506.

II) Descubrió América cuando tenía 56 años.

III) Cuando murió tenía 70 años.

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III d) Ninguna e) Todas

<u>Actividad 16</u>: Indicar si las propiedades planteadas en cada expresión son válidas y en caso de serlo, dar su nombre:

a) $3+6=6+3$ b) $7-2=-2+7$ c) $3(5-1)=15-3$

d) $\sqrt{3+5}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ e) $(16-12):4=16:4-12:4$ f) $\left(2^3\right)^2=2^6$

g) $\left(4+2\right)^3=4^3+2^3$ h) $\sqrt[4]{81\ .\ 16}=\sqrt[4]{81}.\sqrt[4]{16}$ i) $\left(3^3\ .\ 5^2\right)^3=3^9\ .\ 5^6$

j) $6+(-6)=(-6)+6=0$ k) 2+0=0+2=2 l) $\sqrt[3]{\frac{8}{81}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}}$

ll) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}$ m) $3.\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.3=1$ n) $3^4\ .\ 3^2=3^6$

<u>Actividad 17</u>: Determinar si son verdaderos o falsos los siguientes ítems y justificar:

a) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

b) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

c) $a^{2n} + a^{3n} = a^{5n}$

d) $a^n . a^n = a^{n^2}$

e) $a^n . a^n = a^{2n}$

f) $\sqrt{(-6)^2} = 6$

g) $\sqrt[3]{(a)^2} = (a)^{\frac{3}{2}}$

h) $a.0 = 0$

i) $(-a).(-b) = -a.b$

j) $(a+b):c = a:c+b:c \text{ con } c \neq 0$

Actividad 18: Encontrarel valordecadaexpresiónoindicasinoestádefinida.

a) 0.0 b) 0.5 c) 0/ 5

d) 5/ 0 e) 5^0 f) 0^5

g) -2^4 h) $(-2)^4$ i) $(-2)^{-4}$

j) -2^{--4}

Actividad 19: Expresar como fracción decimal y operar:

a) $0,\widehat{12} - 5,\hat{6} - 9,2\hat{3} + 3,1 =$ b) $(3,\hat{7} - 1,2).\ 0,\hat{3} =$

Actividad 20: Resolver las siguientes operaciones combinadas:

a) $\frac{6}{7} - \left(\frac{2-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}.\frac{15}{4}} \right) + 2 - (3-4) =$

b) $2 - \frac{4}{5}.7 + \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{28}\right) - 4(2-1) + \frac{15}{2}\left[-\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\left(-\frac{5}{8}\right) - \frac{1}{4}\right] =$

c) $\left[2-1+3(6-7)\right]^3 + (20-16):2+4^{-1} - \frac{1}{2} =$

d) $3 - \frac{3}{4}:\frac{3}{2} + 1^2.1^{-3} + 3(1-5) + 2^0 =$

e) $\dfrac{\left(1-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{5}{2}-2}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}:\dfrac{1}{3}+4}=$

f) $\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)^2:\dfrac{3}{10}=$

g) $\dfrac{1}{3}.\left[\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{3}\right):2+\dfrac{1}{6}\right]+3=$

h) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{9}\right).\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{6}\right)}{\left(\dfrac{7}{12}-\dfrac{5}{6}\right).\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}\right)}=$

i) $\left[\left(2-1\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{5}{8}-\dfrac{3}{4}\right)-\left(\dfrac{6}{5}.\dfrac{1}{3}\right)^4.\left(7\dfrac{1}{2}\right)^3\right]:\left(5-\dfrac{6}{5}\right)=$

j) $\left[\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{9}\right)+13\left(\dfrac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left[\left(\dfrac{1}{2}-1\right):2\dfrac{1}{2}\right]=$

k) $\dfrac{1}{3}-2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{1}-\left(\dfrac{4}{3}-1\right)-3=$

l) $\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}\right]^{-4}:\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3}.4^2\right]-\left(2\dfrac{2}{9}\right)=$

Actividad 21: Calcular:

$a)12-\sqrt{9}=$ $\quad b)3-2+\sqrt{16}=$ $\quad c)\sqrt{125}+3.2^2=$

$d)3^2+\sqrt{20+5}=$ $\quad e)30.(\sqrt{25}+15)+2.\sqrt{9}=$

$f)(3+2).\sqrt{4}.(2+1)^2=$

$g)\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{-4}+\sqrt[3]{(8)^{-1}:2}-\sqrt[3]{(2)^{-2}:\sqrt{16}}=$

$h)\sqrt{\left(1-\dfrac{7}{16}\right)}-\left[\left(\dfrac{2}{3}-1\right)^{-1}\right]^{-2}+\sqrt{-16}.\sqrt{-25}-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=$

$i)3.\left(\dfrac{4}{5}-2\right)^0-7^2.7^{-3}:7^{-1}+\left(\sqrt[6]{2^3}\right).\left(\sqrt{2}\right)^{-1}=$

$j)\sqrt{-25}.\sqrt{-4}+\sqrt[3]{\sqrt{64}}-\sqrt[3]{-125}+\left(-\dfrac{5}{2}\right)^{-1}.\dfrac{2}{5}=$

$$k)\ \frac{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right):\frac{2}{5}}{\frac{1}{8}\left[\frac{3}{2}-\frac{5}{4}.2:\left(1-\frac{1}{2}\right)\right].\frac{5}{7}}=$$

$$l)\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+3^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)=$$

$$ll)\ \frac{1,\hat{2}:\left(4-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{0,\hat{5}\ .\ 5}}{\left(2,\hat{6}-1,6\right)\left(0,\hat{8}\hat{0}-0,\hat{4}+\frac{1}{11}\right)\sqrt{13+\frac{4}{9}}}=$$

$$m)\sqrt{\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}-\frac{2}{\sqrt{9}}\right)\left(-\frac{1}{15}\right)}-\frac{\left(\frac{1}{2}+2\right):\frac{1}{4}}{\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{14}\right).\frac{7}{6}}=$$

$$n)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+2^{2}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}-\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$ñ)\sqrt{2+\left[\left(-\frac{1}{4}+\frac{5}{3}\right):\left(\frac{1}{6}-3\right)\right]^{2}}=$$

<u>Actividad 22</u>: Indicar con una cruz cuál es el resultado correcto. (Resolver aplicando las propiedades correspondientes).

a) $\left[\left(\frac{1}{2}-3\right).2\right]-\left(\frac{2}{3}-2\right):\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}-3^{-2}=$ $\quad\frac{2}{9}$ ☐ 9 ☐

b) $\sqrt{3+\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right):\left(1-\frac{1}{5}\right)\right]}=$ $\quad\sqrt{\frac{97}{24}}$ ☐ $\sqrt{\frac{24}{97}}$ ☐

<u>Actividad 23</u>: Calcular

a) $\left[\dfrac{\sqrt[6]{\frac{1}{3}.\frac{1}{9}.\frac{1}{27}}}{1-\frac{1}{2}}\right]^2-\dfrac{-1+4:\frac{6}{5}}{1-1:\frac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{2+\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}}=$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{(-3)^3\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\left(-\frac{1}{81}\right)}}{\dfrac{-2-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{15}{8}}=$

c) $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-\sqrt{3}}=$

d) $\dfrac{7}{3\sqrt[3]{4}}=$

e) $\sqrt{\dfrac{5^4.5^2:5^3}{\left(1-\frac{2}{5}\right)}.\dfrac{1}{3}}-\left(2\dfrac{1}{5}\right)^2.\left(\dfrac{25}{121}\right)^{-1}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3=$

<u>Actividad 24</u>: Racionalizar los denominadores de las expresiones dadas

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=$ b) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=$ c) $\dfrac{3}{5\sqrt[6]{5^2}}=$ d) $\dfrac{1}{-1+\sqrt[3]{3^4}}=$

e) $\dfrac{6}{3\left(\sqrt{5}-2\right)}=$ f) $\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}=$ g) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$ h) $\dfrac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$

<u>Actividad 25</u>: Decir si las siguientes igualdades son correctas

a) $\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{6}+3\right)=\sqrt{6}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=4+2\sqrt{2}$

<u>Actividad 26</u>:

(I) Pasar a notación científica:

a) 567.000.0000 =
b) 870.000.000.000 =
c) 0,00000000000000456 =
d) 0,00000634 =
e) 0,000045 =
f) 0,000001236 =
g) 7.000.000 =
h) 129.000.000 =
i) 23.000.000 =
j) 0,000045 =

(I) Expresar los siguientes números en forma decimal:

a) $4,89\ 10^7 =$
b) $6,9876\ 10^{10} =$
c) $8,98\ 10^{-4} =$
d) $5,654\ 10^{-9} =$
e) $2,457\ 10^2 =$
f) $6,7\ 10^{-5} =$
g) $9,65\ 10^6 =$
h) $8,45\ 10^{-3} =$
i) $3,436\ 10^6 =$
j) $7,21\ 10^{-2} =$

Actividad 27: Realizar las operaciones indicadas en la forma de notación científica, empleando las propiedades de la potenciación.

a) $4,7\ 10^3 + 5,8\ 10^3 - 0,6\ 10^3 =$

b) $5,4\ 10^{-6} - 3,1\ 10^{-6} + 0,32\ 10^{-6} =$

c) $8,2\ 10^{-2}\ .\ 4,2\ 10^3\ .\ 5,43\ 10^{-4} =$

d) $\dfrac{6,34\ 10^3\ .\ 8,2\ 10^{-5}}{9,21\ 10^{-4}} =$

Actividad 28: Operar sin calculadora y dar el resultado en notación científica:

a) $\left(10^3 + 2.10^3\right).10 =$

b) $\left(10^2 + 2.10^4\right).10 =$

c) $4,2.10^2 \text{ x } 3.10^{-1} =$

d) $\dfrac{2.10^3 \text{ x } \left(4.10^{-2}\right)^2 \text{ x } 10^4}{4.10^{10} \text{ x } 2.10^{-1}} =$

Actividad 29: Expresa las cantidades indicadas como el producto de número natural menor que diez por una potencia de base10.

a) Una persona sana puede llegar a tener 20 billones de glóbulos rojos en su sangre.
b) El océano Pacífico tiene una superficie aproximada de 180 millones de kilómetros cuadrados.
c) El planeta Tierra se formó hace casi 4500 millones de años.
d) La masa de la Tierra es aproximadamente de seis mil trillones de toneladas.

Actividad 30: Resolver

$$\frac{3,2.10^{-4}\left(4,56.10^{-3} - 5,3.10^{-3}\right)}{1,2.10^6\ \ 4,98.10^{-5}} =$$

PROBLEMAS

1.- Isabel ha comido 2/5 de una bolsa de 400 gramos de cereales. ¿Cuántos gramos se ha comido?

2.- Una aleación está formada por catorce veinteavos de plata, siete veinticincoavos de bronce y el resto es hierro. Indicar cuál es el elemento que se presenta en mayor cantidad.

3.- Paseando por la calle se observa una madera que mide 0,34 cm de largo y 0,25 cm de ancho. ¿Cuál es el área de la madera?

4.- El precio de un libro es de $ 25, pero debido a que está rebajado, finalmente se pagan $22. ¿Cuánto es el porcentaje que se ha rebajado?

5.- Un edificio de 4320m2 tiene una zona de ventilación que ocupa un 25% del área total. ¿Cuántos metros cuadrados de área son correspondientes a la ventilación?

6.- Un cuadrado tiene un perímetro de 20 cm. Expresa el perímetro como función de la longitud del lado.

7.- De los 200 alumnos del ingreso de una universidad, 98 son mujeres, 60 estudian ingeniería y 60 son mujeres que no estudian ingeniería. ¿Cuántos hombres no estudian ingeniería?

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

SOLUCIONES

<u>Actividad 1</u>:

a) $\{domingo, lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sabado\}$
b) $\{verano, otoño, invierno, primavera\}$
c) $\{1,3,5,7,9\}$
d) $\{12,14,16,18\}$
e) $\{2,3,5,7,11,13\}$
f) $\{x \in \mathbb{Z} / x = 5.n \quad donde \;\; n \in \mathbb{Z}\}$
g) $\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$
h) $\{Chile, Uruguay, Paraguay, Brasil, Bolivia,\}$

<u>Actividad 2</u>:

a) V b) V c)F d)V e)V f) F g)F h)V

<u>Actividad 3</u>:

a) Finito b) unitario c)infinito d)vacío e)infinito f)finito

g) infinito h)infinito i)vacío j)finito

<u>Actividad 4</u>:

(I) A = C = H, B = D, E = F = G **(II)** Conjuntos vacíos: E, G, H, C, B

<u>Actividad 5</u>:

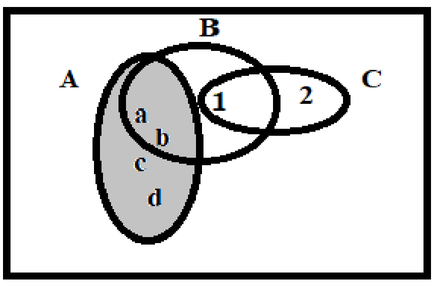
(I)

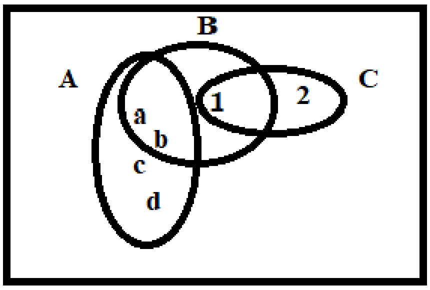
a. $A \cup B = \{a, b, c, d, 1\}$ b.$B \cap C = \{1\}$ c.$A \cap C = \emptyset$ d. $C \cup C = \{1,2\}$

e. $B \cap B = \{a, b, 1\}$ f. $(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, 1,2\}$ g. $(A \cup B) \cap C = \{1\}$

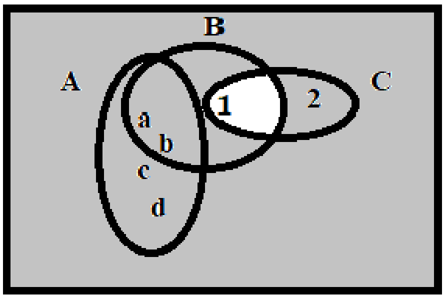
h. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{\emptyset, 1\}$

(II)a.

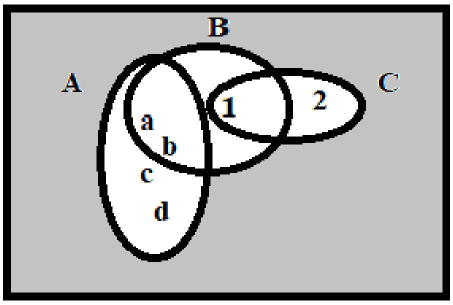




b.



c.



d.

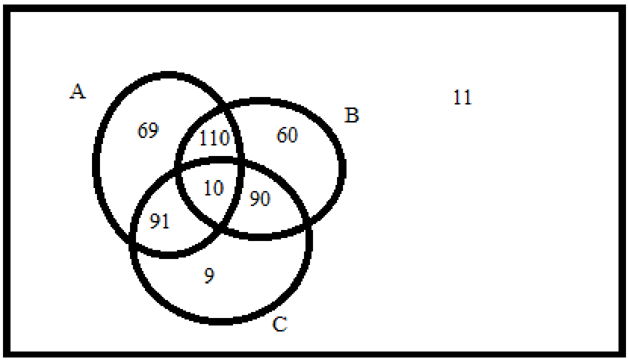
(III)

a. A (ley de absorción) b. A(ley de absorción) c. $A \cup B$ d. U e. U

<u>Actividad 6</u>:

Plantas	A	C	$A \cap C$	$A \cup C$
Tulipán				
Duraznero	X	X	X	X
Sauce	X			X
Frutilla		X		X
Álamo	X			X
Maíz				

<u>Actividad 7</u>: Sean A el conjunto de los encuestados que prefieren Compost, B los que prefieren Guano de la Isla y C los que prefieren Musgo. Entonces el diagrama de Venn es el siguiente



a) 439 b)138 c)149 d)291 e)301 f)10

Actividad 8:

Nº	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	I	$\mathbb{R}$
-5		X	X		x
π				X	X
0		X	X		X
$\sqrt{10}$				X	X
$2\frac{1}{4}$			X		X
$4,\widehat{3}$			X		X
$\frac{5}{2}$			X		X
$\frac{14}{90}$			X		X
7	X	X	X		X
$\frac{8}{9}$			X		X
E				X	X
$\frac{2}{5}$			X		X
$0,75$			X		X
$0,14\widehat{2}$			X		X
$5\frac{2}{990}$			X		X

Actividad 9:

No pertenecen a los$\mathbb{N}$: 3,4 π -2 1/9

No pertenecen a los $\mathbb{Z}$: e 1/3 $\sqrt{5}$

No pertenecen a los $\mathbb{Q}$: todos son racionales

No pertenecen a los I: -2 0 1 0,34 8/9

Actividad 10: 2; 1,76; $\sqrt{3}$; 0,75; ½; 0; -3/4; -6, -6,12, $-6{,}1\hat{2}$

Actividad 11:

$2{,}3 \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $-\frac{1}{7} \in \mathbb{Q}$, $0{,}85 \in \mathbb{Q}$, $-3,\hat{4} \in \mathbb{Q}$

$2 \in \mathbb{Z}$ $-\frac{7}{4} \in \mathbb{Q}$

Actividad 12:

a) $-2 > -8$ b) $5 = \frac{25}{5}$ c) $2,\hat{5} > 2{,}5$ d) $3\,\frac{9}{2} = \frac{15}{2}$ e) $\frac{4}{9} < \frac{5}{2}$

Actividad 13:

$$2{,}5 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$4{,}5 = 4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$0,\hat{1} = \frac{1}{9} = \frac{3}{27}$$

$$-0{,}75 = -\frac{3}{4}$$

Actividad 14:

a)

Si $|x| = 2$ *entonces* $x = 2$ *o* $x = -2.$

Si$|x| = -1$ no tiene solución.

Si $|x| = 7$ *entonces* $x = 7$ *o* $x = -7$

b)

Desigualdades	Intervalo	Tipo de intervalo	Representación gráfica
$-1 < x < 4$	$(-1{,}4)$	Abierto	
$0 \le x \le 5$	$[0{,}5]$	Cerrado	
$x \ge \frac{5}{2}$	$\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$	No acotado por derecha y cerrado por izquierda	

$x \le -3$	$(-\infty, -3]$	No acotado por izquierda y cerrado por derecha	
$\lvert x \rvert < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$	(-2,2)	Abierto	
$8 < x \le 10$	$(8,10]$	Semiabierto	
$\lvert x \rvert \ge 1 \Rightarrow x \le -1 \text{ o } x \ge 1$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	-----------	
$-2 < x \le 3$	$[-2,3]$	Cerrado	
$x \le 4$	$(-\infty, 4]$	No acotado por izquierda y cerrado por derecha	
$x > -2$	$(-2, \infty)$	No acotado por derecha y abierto por izquierda	
$x > -1$	$(-1, +\infty)$	No acotado por derecha y abierto por izquierda	

Actividad 15:

a) Hay tres números primos: 2,5,11.

b) El máximo común divisor es 6

c) div 18: 1,2,3,6,9,18

div 36:1-2-3-4-6-9-12-18-36

d) Respuesta correcta (e)

Hay seis elementos en común 1,2,3,6,9,y 18.

Actividad 16:

a) Propiedad conmutativa de la suma.
b) Propiedad conmutativa de la suma.
c) Propiedad distributiva del producto respecto a la suma.
d) No válida.
e) Propiedad distributiva de la división respecto a la suma.
f) Propiedad de la potencia de otra potencia.
g) No válida.

h) Propiedad distributiva de la radicación respecto al producto.
i) Propiedad distributiva de la potencia respecto al producto.
j) Propiedad del opuesto bajo la suma.
k) Propiedad del neutro aditivo/neutro respecto a la suma.
l) Propiedad distributiva de la radicación respecto al cociente.
m) Propiedad del inverso multiplicativo.

<u>Actividad 17</u>:

a) Falso, la radicación no es distributiva respecto a la suma.
b) Falso, la potencia no es distributiva respecto a la suma.
c) Falso, $a^{2n} + a^{2n} = 2a^{2n}$
d) Falso, $a^n . a^n = a^{n+n}$
e) Verdadero
f) Verdadero
g) Verdadero
h) Verdadero
i) Falso, $(-a).(-b) = a.b$
j) Para $c \neq 0$ es verdadero.

<u>Actividad 18</u>:

a) 0 b) 0 c) 0 d)No definida e) 1 f) 0 g) -16 h) 16 i) 1/16 j) -1/16

<u>Actividad 19</u>:

a) $\frac{-19270}{165} = -11,6\widehat{78}$ b)$\frac{116}{135} = 0,85\widehat{92}$

<u>Actividad 20</u>:

a) $\frac{\mathbf{127}}{\mathbf{42}}$b)$\frac{-2029}{140}$c)$\frac{-25}{4}$d)$\frac{-15}{2}$e) 0 f)$\frac{5}{54}$g)$\frac{271}{90}$h)$\frac{-4}{27}$ i)$\frac{-2153}{760}$j) -10 k)$\frac{-13}{3}$ l)$\frac{16}{9}$

<u>Actividad 21</u>:

a)9 b)5 c)$5\sqrt{5} + 12$ d)14 e)606 f)90 g)1/2 h)$\frac{779}{36}$ i)3 j)$\frac{421}{25}$ k)$\frac{-4}{3}$

l)$\frac{-5}{6}$ ll)$\frac{9}{8}$ m)$\frac{-598}{15}$ n)0 ñ)3/2

<u>Actividad 22</u>:a)2/9 b)$\sqrt{\frac{97}{24}}$

<u>Actividad 23</u>:a)$\frac{659}{48}$ b)$\frac{1}{2}.\sqrt[3]{-39}$ c)$2 + \sqrt[2]{3}$ d)$\frac{7.\sqrt[3]{2}}{6}$ e)$\frac{-224504}{15000}$

<u>Actividad 24</u>:

a) $2\sqrt{2} + 2$ b) $2 - \sqrt{3}$ c) $\frac{3\sqrt[3]{5^2}}{25}$ d)$\frac{-1-\sqrt{3}}{4}$ e)$2\sqrt{5} + 4$f) $\frac{-\sqrt{7}+1}{6}$

<u>Actividad 25</u>:

a)No es correcta b)No es correcta

<u>Actividad 26</u>:

(I) a) $5{,}67.10^{8}$ b)$8{,}7.10^{11}$ c)$4{,}56.10^{-15}$ d)$6{,}34.10^{-6}$ e)$4{,}5.10^{-5}$ f)$1{,}236.10^{-6}$ g) 7.10^{6} h)$1{,}29.10^{8}$ i)$2{,}3.10^{7}$ j)$4{,}5.10^{-5}$

(II) a) 48.900.000 b)69.876.000.000 c)0,000898 d)0,000000005654 e)245,7

f) 0,000067 g) 9.650.000h)0,00845 i)3.436.000 j)0,0721

<u>Actividad 27</u>:

a)$9{,}9.10^{3}$ b)$2{,}62.10^{-6}$ c)$1{,}870092.10^{-1}$ d)$5{,}644733985.10^{2}$

<u>Actividad 28</u>:

a)3.10^{4} b)$2{,}01.10^{5}$ c)$1{,}26.10^{2}$ d)4.10^{-6}

<u>Actividad 29</u>:

a)2.10^{10} b)$1{,}8.10^{8}$ c)$4{,}5.10^{9}$ d)6.10^{15}

<u>Actividad 30</u>:$-0{,}3962251673.10^{-8}$

<u>PROBLEMAS</u>

1.- Comió 160gr de cereales.

2.- El elemento de mayor cantidad es la plata.

3.- Área: 0,085cm^2

4.- Se ha rebajado un 12%

5.-1.080 m^2 de ventilación.

6.- $p = 4.l$

7.- 80 hombres no estudian ingeniería.

UNIDAD II

Expresiones algebraicas

2.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Al finalizar esta unidad, el alumno deberá ser hábil en:

- *Identificar las expresiones algebraicas de las no algebraicas.*
- *Clasificar las expresiones algebraicas.*
- *Reconocer los polinomios.*
- *Operar correctamente con los polinomios.*
- *Aplicar el teorema del resto, del concepto de raíz y de divisibilidad.*
- *Factorear adecuadamente, expresiones algebraicas en sus factores primos.*
- *Operar con expresiones racionales polinómicas.*
- *Diferenciar una identidad de una ecuación.*
- *Identificar los distintos tipos de ecuaciones.*
- *Resolver diferentes ecuaciones.*
- *Reconocer las ventajas y desventajas en la aplicación de uno u otro camino de resolución de ecuaciones.*
- *Aplicar los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas.*

Un poco de historia

Hasta el siglo XVI los avances de la Matemática no fueron suficientes, siendo una de las causas de esta situación, el no contar con símbolos que permitieran a los matemáticos expresar sus trabajos en forma simple y que facilitaran su lectura.

Desde los babilonios (1700 a. de C.) hasta Diofanto (250 d. de C.) las operaciones se expresaban con el lenguaje ordinario <período retórico o verbal>. Por ejemplo, en el papiro de Rhind (1650 a. de C.) se puede leer: "Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24". Con la palabra "un montón" designaban la incógnita; un par de piernas andando en la dirección de la escritura era el signo (+) y en contra el signo (-). ¿Cómo se escribiría hoy esta ecuación?

Luego, desde Diofanto y hasta comienzos del siglo XVI se comenzaron a utilizar algunas abreviaturas <período abreviado o sincopado>. Por ejemplo, para expresar la ecuación

$3x^2 - 5x + 6 = 0$,Regiomontano (1464) escribía:

3 CENSUS ET 6 DEMPTIS 5 REBUS AEQUATUR ZERO

Mientras que Luca Pacioli (1494) escribía:

3 CENSUS P 6 DE 5 REBUS AE 0

A partir del siglo XVI, con Vieta y Descartes, se empezó a utilizar un lenguaje simbólico muy parecido al actual <período simbólico>. Por ejemplo, la ecuación anterior era expresada así:

Stevin (1585): $3_{\textcircled{2}} - 5_{\textcircled{1}} + 6_{\textcircled{0}} = 0$

Vieta (1591): 3Q - 5N + 6 ae 0

Descartes (1637): 3xx - 5x + 6 = 0

Actualmente, el lenguaje de las Matemáticas es internacional. Se puede desconocer el idioma en que está escrito un problema, pero la expresión algebraica será la misma que en cualquier libro español.

yがxの関数であるとき，xの変域をこの関数の定義域といい，
定義域の各値に対して定まるyの値の集合をこの関数の値域という。
関数 $y = x^2$ で，定義域をすべての数の集合とすれば，値域は負でない数全体の集合になる。

En este texto sólo son legibles las letras x e y, así como la fórmula $y = x^2$ (salvo que se sepa leer japonés).
La palabra Álgebra viene del título del libro "Al-jabrw'al_muqabalah" escrito en Bagdad alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo Mohamed ibn-Musa al-Khwarizmi (hijo de Musa y nativo de Khwarizmi). «Al-jabr» significa *transposición* y con ello se hacía referencia al paso de términos de un miembro a otro de la ecuación y «w'al-muqabalah» significa *eliminación* y se hacía referencia a la eliminación de términos iguales en los dos miembros.
Así, en la ecuación: $2x^2 - 3x + 5 = -x^2 + 14 - 3x$
«Al-jabr» será: $3x^2 - 9 - 3x = -3x$
«W'al-muqabalah» será: $3x^2 - 9 = 0$
A la incógnita la llamaba «sahy» (cosa), nombre que perduró durante bastante tiempo.
El Álgebra se caracteriza por el uso de letras y expresiones literales sobre las que se hacen operaciones. La posibilidad de representar con una sola letra una infinidad de valores y el hecho de poder operar con ellas de forma natural y sencilla es lo que la hace ser de gran utilidad.
El lenguaje algebraico tiene reglas particulares que hay que aprender. Así, por ejemplo, es probable que te hayas encontrado con la expresión "8m" y la hayas traducido por "ocho metros"; en las expresiones algebraicas su significado será "ocho por m" o lo que es lo mismo "ocho veces m".
Cuando manejamos solamente números (Aritmética), los signos de operaciones indican una acción cuyo resultado es siempre un número (7 + 6 = 13), sin embargo, cuando tratamos además con letras(Álgebra) estas operaciones no tienen siempre por qué realizarse sino que se dejan indicadas $(3 + x)$. Por otra parte, mientras que en el primero de los casos se llega a un resultado único, en el segundo se expresan todos los resultados posibles, según el valor que se le asigne a x.
Otra "regla" algebraica que has de tener en cuenta es que cuando escribes 35 significa 5 + 3 · 10, sin embargo cuando escribes "3a" significa "tres por a" o, lo que es lo mismo, "a + a + a" (salvo que se especifique que "a" es la cifra de las unidades de un número y 3 es la cifra de las centenas).
El signo igual también tiene en muchas ocasiones un significado distinto cuando trabajamos en Aritmética o en Álgebra.

Así, 2 · 6 = 6 + 6 = 2 · (4 + 2) = 6 · (1 + 1) = ...

Aquí el signo igual se utiliza para expresar de distintas formas varias operaciones que dan el mismo resultado, en cambio, en $x + 6 = 10$ es verdadero sólo para $x = 4$.

Expresiones literales

Cuenta la historia que a mediados del siglo XVI los estados españoles estaban muy distanciados y para comunicarse sin que sus mensajes pudiesen ser conocidos por sus enemigos, empleaban una serie de caracteres desconocidos. Durante los desórdenes de la unión, su código secreto estaba compuesto por unos 500 caracteres diferentes y aunque sus mensajes eran frecuentemente interceptados, no podían ser descifrados. Mandadas estas cartas a Vieta las descifró sin mayores problemas. Esto desconcertó a los españoles durante dos años que pensaron que el rey lo había descubierto a través de un mago. Este mago, que era un matemático, había aplicado sus inventos de escrituras y notaciones matemáticas. Estos trabajos están publicados en el libro "El Álgebra nueva" donde Vieta muestra el enorme interés que tiene para las matemáticas (y otras ciencias) el efectuar cálculos con letras en lugar de con números.[1]

El álgebra nos permite ir del número al símbolo, de una situación particular a una general. El lenguaje algebraico permite de manera simple, hallar relaciones, propiedades y resolver problemas.
Las expresiones algebraicas deben operarse convenientemente con el fin de convertirlas en expresiones equivalentes más sencillas.

Una expresión algebraica es cualquier combinación de números representados por letras o por letras y cifras vinculadas entre sí por operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación.

Ejemplos de expresiones algebraicas son:

$$3ax^2 - 7xy + y \qquad 4\sqrt{x} - z^3 - 2y \qquad \frac{x+3}{y-5}$$

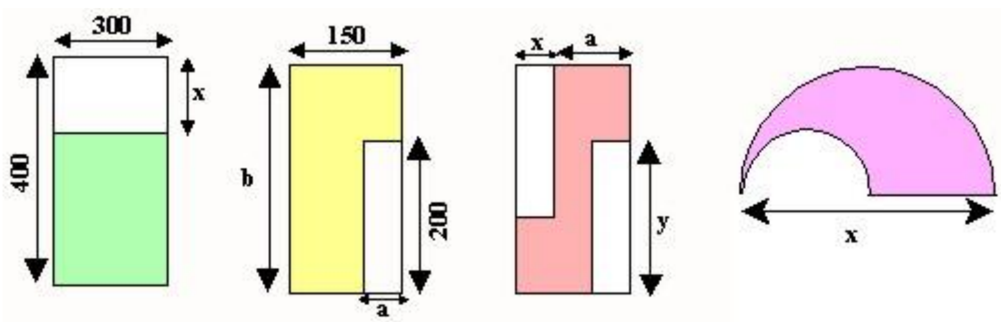
$$2\pi r \qquad -5\frac{2}{3}\sqrt{7} \qquad a^3 + a^2b^{-3}x$$

Únicamente consideraremos expresiones algebraicas en las que estén presentes números reales.

Aplicaciones de expresiones algebraicas

- Simbolizar frases o ecuaciones:
  El padre de Carlos tiene triple edad que él: $x = 3y$.
  La suma de dos números consecutivos es 253: $x + y = 253$
- Expresar fórmulas o identidades:
  El área de un rectángulo de base a y altura b es $S = a.b$.
  Volumen de un cubo de arista a es $V = a^3$
  La velocidad es igual a la velocidad inicial más la aceleración por el tiempo: $v = v_0 + at$
- Resolver situaciones problemáticas diversas como:

  - Cálculo de las áreas coloreadas de distintas figuras



[1]http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/algebra/simbolizacion/simbolizacion.htm

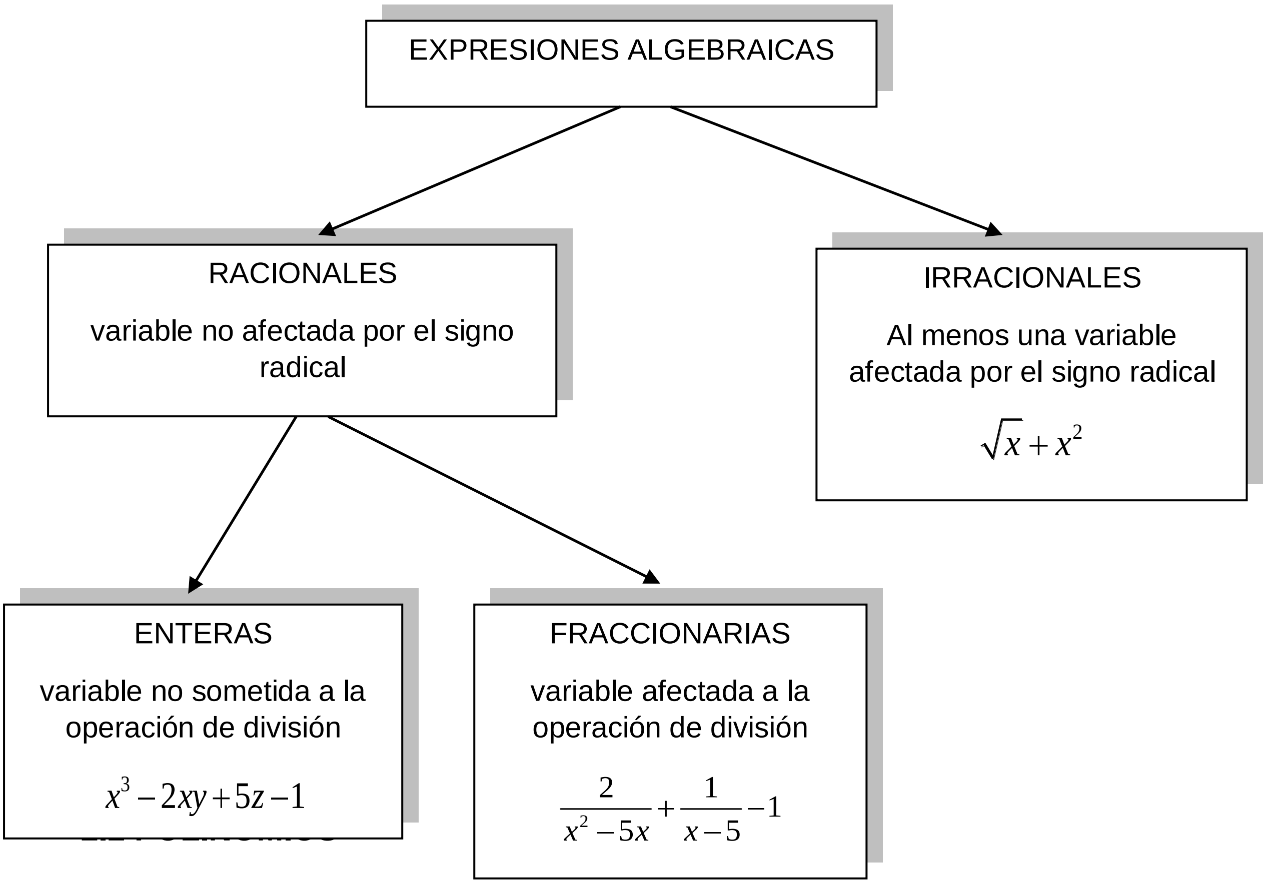
- ¿Cuánto gastas si vas a la librería y compras 5 lápices a x pesos cada uno y 3 libretas a y pesos cada una?

Las expresiones algebraicas se utilizan en diversas disciplinas como Matemática, Física, Química.Se pueden definir diversas operaciones directas como suma, resta, multiplicación, potenciación con exponentes naturales, e inversas de éstas como resta, división, radicación. Estas operaciones se denominan algebraicas para diferenciales de las de no algebraicas o trascendentes, en éstas últimas intervienen funciones como la exponencial, la logarítmica y las trigonométricas.

En las expresiones algebraicas se observa una parte literal que puede representar:

- *Variables:* cantidades que pueden tomar cualquier valor dentro del conjunto numérico en que se opera y a las cuales se denotan con las últimas letras del abecedario: r, s, t, u, v, x, y, z.
- *Constantes:*Son expresiones que representan números y acompañan a las variables. Son cantidades fijas pero no especificadas ya sea porque no se conoce su valor o porque no conviene darlo y se indican con las primeras letras del alfabeto: a, b, c, d, …..

Al considerar las operaciones algebraicas a las que se encuentra sometida la/s variables, es posible clasificarlas del siguiente modo:



Monomios son expresiones algebraicas en las que las variables están multiplicadas entre sí y/o por constantes.

Ejemplos: $x^2.y$; $\frac{1}{2}x^3$; $-\sqrt{2}x.y.z^2$; $-7x$

Monomios semejantes, son dos monomios que tienen las mismas variables elevadas a la misma potencia.

Ejemplos: $4x^2y^4$; $\frac{-1}{3}x^2y^4$ son monomios semejantes.

Es posible sumar/restar monomios semejantes, por ejemplo:

$$3x^3 + 4x^3 = (3+4)x^3 = 7x^3$$

La suma de dos monomios no semejantes nunca es otro monomio, por ejemplo:

$$2x + 3x^2$$

En este caso particular la suma nos da un binomio. Un binomio es la suma de dos monomios no semejantes, un trinomio de tres, y en general un polinomio es la suma algebraica de cualquier número de monomios no semejantes (un monomio también es un polinomio).

Denominamos polinomio a toda expresión algebraica racional entera.
Ejemplos:

$$P(x) = 4x^4y^2 - \frac{3}{7}x^3y^3 + \frac{5}{3}x^2y^4$$

$$Q(x) = a^2b^{-1}x^2z + 3xz^2 - acz^3$$

$$R(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{4}{9}x^2 + 2x - 5$$

En este curso trabajaremos solamente con polinomios de una sola variable.
Podemos expresar a un polinomio como una suma algebraica de términos, cada uno de ellos es el producto de una constante o coeficiente numérico por una potencia de x.
Un polinomio puede escribirse en forma decreciente o creciente en las potencias de x, cuando esto ocurre, se dice que el polinomio está en forma general. De acuerdo a esto:

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots\dots + a_1x + a_0$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}x^{n-i}$$

$a_{n,}a_{n-1}, a_{n-2}, \dots\dots, a_1, a_0$ números reales llamados coeficientes

a_n es el coeficiente real

a_0 *es* el término independiente

x es la variable o indeterminada

n-1, n-2, ..., 2, 1, 0 son números naturales

n es el grado del polinomio y se denota grado de (P(x))=*n*

El grado de un polinomio de la siguiente forma es la mayor potencia n, es decir, el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots\dots + a_nx^n + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0$$

El polinomio es *homogéneo* cuando todos sus monomios son semejantes.
Según la cantidad de *términos* de un polinomio, es el nombre que recibe: un término monomio, dos términos binomio, tres términos trinomio y así sucesivamente.
Se denomina coeficiente principal al coeficiente que acompaña a la variable de máxima potencia.

"La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles."

René Descartes (1596-1650)

"El álgebra es generosa: a menudo da más de lo que se le pide."
D'Alembert (1717-1783)

2.3 IGUALDAD DE POLINOMIOS

Dos polinomios son iguales si y solamente si los coeficientes de los términos semejantes son idénticos.

$$
\begin{aligned}
&\text{Si } P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_n x^n + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0 \\
&y \;\; Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_n x^n + b_0 \quad \text{con } \mathrm{b}_n \neq 0 \\
&P(x) = Q(x) \Leftrightarrow a_i = b_i \;\; \text{con} \;\; i = 0,1,2,....., n
\end{aligned}
$$

$$\boxed{P(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i : a_i = 0}$$

Si el grado de un polinomio es cero (n=0), se tiene un polinomio representado por un número distinto de cero.
El número cero representa un polinomio, se denomina **polinomio nulo** pero su grado es indefinido ya que no tiene sentido hablar de grado de un polinomio nulo.

2.4 VALOR NUMÉRICO

Se denomina valor numérico de un polinomio P(x) en $x = c$ al valor que toma el polinomio cuando se reemplaza la variable x por el número c y lo designamos por $P(c)$.

$$
\begin{aligned}
&\text{Si } P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_n x^n + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0 \\
&\quad P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + ... + a_n c^n + a_0
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&Si \; P(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 4 \quad \text{y} \quad c = 2 \\
&\quad P(2) = -2^3 + 3.2^2 - 2 + 4 = -8 + 12 - 2 + 4 = 6
\end{aligned}
$$

2.5 OPERACIONES CON POLINOMIOS

1.- Adición

Dados los polinomios P(x) y Q(x) de coeficientes reales

$$
\begin{aligned}
&\text{Si } P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_n x^n + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0 \\
&y \;\; Q(x) = b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + b_{s-2}x^{s-2} + ... + b_s x^s + b_0 \quad \text{con } \mathrm{b}_s \neq 0 \\
&\text{donde } n \geq s, \text{ se llama suma de } P(x) + Q(x): \\
&P(x) + Q(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + ... + c_n x^n + c_0 \\
&c_i = a_i + b_i \quad \text{con} \;\; i = 0,1,2,.....n \\
&\text{Donde } n > s, \text{ se tiene que suponer que } b_{s+1},.....,b_n \quad \text{son iguales a cero.}
\end{aligned}
$$

La suma de dos polinomios P(x)+Q(x) es otro polinomio que se obtiene de sumar los monomios semejantes, es decir, se suman los coeficientes de los términos de igual grado.

Ejemplo:

Dados los polinomios

$P(x)=4x^4+5x^3-x^2-2 \quad$ y $\quad Q(x)=-x^4+2x^2-x-4$

$P(x)+Q(x)=(4-1)x^4+(5+0)x^3+(-1+2)x^2+(-2-4)$

$= 3\mathrm{x}^4+5x^3+x^2-6$

Propiedades de la suma

- Asociativa$\forall P(x), Q(x), R(x)$: $P(x)+[Q(x)+R(x)]=[P(x)+Q(x)]+R(x)$
- Conmutativa$\forall P(x), Q(x)$: $P(x)+Q(x)=Q(x)+P(x)$
- Existencia del elemento neutro $\forall P(x)\ \exists 0_p(x)$: $P(x)+0_p(x)=P(x)$
- Existencia del elemento opuesto $\forall P(x)\ \exists -P(x)$: $P(x)+\left[-P(x)\right]=0_p(x)$

2.- Multiplicación de un número real por un polinomio

Si $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+........+a_nx^n+a_0$ con $a_n\neq 0$ y k un número real:

$k.P(x)=(k.a_n)x^n+(k.a_{n-1})x^{n-1}+(k.a_{n-2})x^{n-2}+........+(k.a_n)x^n+k.a_0$

Ejemplo:

Si $P(x)=\ -2x^3+3x^2-x+5\ \ y\ \ k=-3$
$(-3).P(x)=(-3).(-2)x^3+(-3).3x^2+(-3).(-x)+5$
$(-3).P(x)=6x^3-9x^2+3x+5$

$SPSi$

3.- Sustracción

Para restar el polinomio Q(x) al P(x) se debe sumar a P(x) el opuesto de Q(x):
$P(x)-Q(x)=P(x)+\left[-Q(x)\right]$

Ejemplo:

Sean los polinomios

$P(x)=-2x^4-3x^3+x+1 \quad$ y $\quad Q(x)=3x^4-7x^3+x^2-3$

$P(x)-Q(x)=P(x)+\left[-Q(x)\right]=(-2x^4-3x^3+x+1)+(-3x^4+7x^3-x^2+3)$

$=-5x^4+4x^3-x^2+x+4$

4.- Multiplicación

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término de uno de ellos por cada monomio del otro y después se suman los términos semejantes (de igual grado).

Se denomina producto de los polinomios P(x) y Q(x) de acuerdo a P(x) y Q(x) dados anteriormente, al polinomio:

$$P(x).Q(x) = d_{n+s}x^{n+s} + d_{n+s-1}x^{n+s-1} + ... + d_1 x + d_0$$

siendo $d_i = \sum_{k+j=i} a_k b_j$ con $i = 0,1,......., n+s-1, n+s$

Para el realizar el producto es necesario tener en cuenta la propiedad distributiva con respecto de la suma de números reales y producto de potencias de igual base.

$$P(x).Q(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 \quad \vee \quad Q(x) = 0$$

Propiedades de la multiplicación

- Asociativa $\forall P(x), Q(x), R(x)$: $P(x).[Q(x).R(x)] = [P(x).Q(x)].R(x)$
- Conmutativa $\forall P(x), Q(x)$: $P(x).Q(x) = Q(x).P(x)$
- Existencia del elemento neutro del producto: $\forall P(x)\ \exists\ I(x)$:P(x). I(x) = P(x) donde I(x)=1

Ejemplo:
Sean los polinomios

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 5 \qquad \text{y} \qquad Q(x) = -x^2 + 5x - 3$$

$$\begin{aligned} P(x).Q(x) &= (x^3 + 2x^2 - 2x - 5).(-x^2 + 5x - 3) \\ &= -x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 2x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 2x^3 - 10x^2 + 6x + 5x^2 - 25x + 15 \\ &= -x^5 + 3x^4 + 9x^3 - 11x^2 - 19x + 15 \end{aligned}$$

Dados los polinomios P(x) y Q(x), se verifica que el grado de [P(x).Q(x)]= grado de (P(x))+grado (Q(x))

Algunos productos notables

I).- Diferencia de cuadrados

$$(x-a).(x+a) = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2$$

$$\boxed{(x-a).(x+a) = x^2 - a^2}$$

II).- Cuadrado de un binomio

$$(x \pm a)^2 = (x \pm a)(x \pm a) = x^2 \pm ax \pm ax + a^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$$

$$\boxed{(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2}$$ Trinomio cuadrado perfecto

III).- Cubo de un binomio

$$\begin{aligned} (x \pm a)^3 = (x \pm a)(x \pm a)(x \pm a) &= (x^2 \pm 2ax + a^2)(x \pm a) \\ &= (x^3 \pm ax^2 \pm 2ax^2 + 2a^2x + a^2x \pm a^3) \\ &= (x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3) \end{aligned}$$

$$\boxed{(x \pm a)^3 = (x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3)}$$ Cuatrinomio cubo perfecto

4.- División

Para el caso de números reales tenemos:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & c \end{array}$$

y se cumple que: a = b . c + r
Para dividir los polinomios se aplica el mismo procedimiento que para los números reales.
Con los polinomios se va definir una división con resto, es decir división inexacta:

Dados dos polinomios P(x)(dividendo) y Q(x)(divisor) con Q(x) ≠ 0, se pueden hallar dos polinomios C(x) y R(x) de tal forma que:

P(x) = C(x) Q(x) + R(x),

Donde el grado de R(x) es menor que el de C(x) o bien R(x) = 0. Los polinomios C(x) y R(x) están unívocamente determinados (son únicos).

Es necesario ordenar los polinomios en forma decreciente y completar los términos faltantes con coeficiente nulo.

Ejemplo: Hallar el cociente y el resto de la división entre

$$P(x) = -4x^3 + 3x^2 + 6x^4 - 5 \quad \text{y} \quad Q(x) = -x + 2x^2$$

1. Se completa y ordena el dividendo y se ordena el divisor:

$$P(x) = 6x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 0x - 5 \quad \text{y} \quad Q(x) = 2x^2 - x$$

2. Se realiza la división:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 0x - 5 & 2x^2 - x \\ \cline{3-3}
+ & -6x^4 + 3x^3 & 3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \quad \text{Cociente} \\ \cline{1-2}
 & 0 \quad -1x^3 + 3x^2 + 0x - 5 & \\
+ & \quad 1x^3 - \frac{1}{2}x^2 & \\ \cline{1-2}
 & \quad 0 \quad +\frac{5}{2}x^2 + 0x - 5 & \\
+ & \quad -\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{4}x & \\ \cline{1-2}
 & \quad 0 \quad +\frac{5}{4}x - 5 \quad \text{Resto} &
\end{array}$$

- Se divide el primer monomio del dividendo ($6x^4$) por el primer monomio del divisor ($2x^2$). El resultado ($3x^2$) es el primer monomio del cociente. Se multiplica por el divisor, al polinomio resultante se le cambia los signos ($6x^4 - 3x^3$) y lo sumamos al dividendo.
- Como el nuevo dividendo ($-1x^3 + 3x^2 + 0x - 5$) es de mayor grado que el divisor ($2x^2 - x$), se repite el procedimiento con el primer monomio del nuevo dividendo, es decir, con ($-1x^3$).
- Como el nuevo dividendo $\left(\frac{5}{2}x^2 + 0x - 5\right)$ no es de grado menor que el divisor

$(2x^2 - x)$, es de igual grado, se repite otra vez el procedimiento con el primer monomio del dividendo $\left(\frac{5}{2}x^2\right)$.

- Se obtiene un nuevo dividendo $\left(\frac{5}{4}x - 5\right)$ que es de grado menor que el divisor. Entonces ése es el resto, y termina la división.

Según el algoritmo de la división, se puede escribir:

$$P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$$

$$(6x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 0x - 5) = (2x^2 - x)\left(3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}x - 5\right)$$

Para recordar:

- La división de P(x) : Q(x) puede realizarse siempre que grado de P(x) ≥ grado de Q(x).
- P(x) = C(x) Q(x) + R(x).
- El grado del resto debe ser menor que grado del divisor o R(x) = 0.
  grado R(x) ≤ grado Q(x)
- grado C(x) = grado P(x) - grado Q(x).

Raíz de un polinomio

Un valor de x es raíz de P(x) si el polinomio se anula para este valor.

$$a \text{ es raiz de } P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

Teorema del Resto

Si se realiza la división entera de un polinomio P(x) por (x-a) donde a es un número real, como el divisor es de grado uno, puede suceder que el resto sea de grado cero o que sea el polinomio nulo. O sea, el resto es un número al que se lo llama R.

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$ es igual al valor numérico del polinomio cuando $x = a$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & \underline{x-a} \\ \text{R} & \text{C(x)} \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x-a).\,C(x) + R$$

Si $x = a$, sustituímos en la ecuación anterior, entonces: $P(a) = \underbrace{(a-a)}_{0}.C(a) + R \Rightarrow P(a) = R$

El teorema del resto establece que al dividir un polinomio $P(x)$ por un polinomio de la forma $(x - a)$, se obtiene como resto un número que es igual a $P(a)$. Por lo tanto se puede hallar el resto de una división, sin realizar la misma, alcanza con calcular el valor numérico de $P(x)$ en $x = a$.

Regla de Ruffini

Cuando el divisor es un polinomio de la forma $(x-a)$, la división puede hacerse de una manera más sencilla que la división convencional, aplicando el algoritmo de la Regla de Ruffini.

Si $P(x)=3x^3+7x^2+6x-1$ y $Q(x)=x+2$, al aplicar la regla de Ruffini para dividir $P(x):Q(x)$, se procede de la siguiente manera:

- Se escriben los coeficientes del dividendo, ordenado y completo hasta el término independiente. Del divisor se escribe su raíz (a) en el extremo izquierdo de la tabla:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 7 & 6 & -1 \\ -2 & & -6 & -2 & -8 \\ \hline & 3 & 1 & 4 & -9 \end{array}$$

- El coeficiente principal del dividendo se copia abajo (3). Se lo multiplica por (-2) y el resultado (-6) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (7). Se suman 7 y (-6) y resultado se escribe abajo.
- El 1 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo, se lo multiplica por (-2) y el resultado (-2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (6). Se suman 6 y (-2) y el resultado (4) se escribe abajo.
- El 4 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo, se lo multiplica por (-2) y el resultado (-8) se escribe debajo del último coeficiente del dividendo (-1). Se suman (-1) y (-8) y el resultado (-9) es el resto y se escribe abajo.
- El resto es (-9). Los valores 3, 1 y 4 son los coeficientes de $C(x)=3x^2+1x+4$, su grado es menor en una unidad que el del polinomio dividendo.

De acuerdo al algoritmo de la división: $3x^3+7x^2+6x-1=(x+2)(3x^2+1x+4)+(-9)$

Divisibilidad

Si al efectuar la división entre $P(x)$ y $Q(x)$ el resto es nulo, se dice que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$, o que $Q(x)$ divide a $P(x)$. De este modo $P(x)=Q(x).C(x)$.

Si a es raíz del polinomio P(x), entonces el resto de la división entre $P(x)$ y $(x-a)$ es cero. Es decir, si $P(a)=0$, se cumple que:

$$\boxed{P(x)=(x-a).C(x)+\underbrace{P(a)}_{\text{Resto}}\Rightarrow P(x)=(x-a).C(x)}$$

Y recíprocamente, si al dividir un polinomio $P(x)$ de grado no nulo por $(x-a)$, el resto es cero, por lo tanto a es raíz de $P(x)$.

Teniendo en cuenta el Teorema del resto y los conceptos de divisibilidad y raíz de un polinomio se puede afirmar que las condiciones que se enuncian a continuación son equivalentes:

* a es raíz del polinomio $P(x)$.
* $P(a) = 0$.
*$P(x)$ es divisible por $(x-a)$.
*El resto que resulta de dividir $P(x)$ por $x - a$ es igual a cero.

Ejemplo:

(I) Sea $P(x)=x^3-3x^2+x-3$ con $a=3$ resulta que

$P(3)=3^3-3.3^2+3-3=27-27+3-3=0$

Como $P(3)=0 \Rightarrow$ 3 es raíz de $P(x)$

Para hallar $C(x)$, se divide $P(x)$ por $(x-3)$.

Si se aplica Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$C(x)=x^2+1$$

Como el resto es cero, $P(x)=(x-3)(x^2+1)$

El grado de $C(x)$ es una unidad menor que el grado de $P(x)$.

(II) Sea $P(x)=x^3-x^2-14x+24$ con $a=2$

$P(2)=2^3-2^2-14.2+24=8-4-28+24=0$

Como $P(2)=0 \Rightarrow$ 2 es raíz de $P(x)$.

Aplicando Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -14 & 24 \\ 2 & & 2 & 2 & -24 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

$$C(x)=x^2+x-12$$

$P(x)=(x-2)(x^2+x-12)$

Se obtienen las raíces de $C(x): x_1=3$ y $x_2=-4 \Rightarrow C(x)=(x-3)(x+4)$

Por lo tanto, reemplazando $C(x)$ en $P(x)$: $P(x)=(x-2)(x-3)(x+4)$

De acuerdo a esto, se concluye que*: Un polinomio P(x) puede expresarse como producto con factores de la forma (x-a), siempre que "a" sea raíz de P(x).*

2.6 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Polinomio expresado como producto	Raíces reales	Cantidad de raíces reales
P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)	1, 2 y -3	Tres
Q(x) = (x-3)$(x+5)^2$	3 y -5	Dos
R(x) = x (x-2)(x-3)(x+7)	0, 2, 3 y -7	Cuatro

Teorema: Un polinomio de grado n admite n raíces reales o complejas.

Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales.
Puede ocurrir que un polinomio tenga raíces iguales o distintas. En el caso que tenga iguales, se dice que son raíces múltiples, como se observa en el polinomio Q(x) de la tabla anterior: $(x+5)^2$, esto significa que la raíz -5 es una raíz que se repite dos veces, esta raíz es de orden de multiplicidad 2.

2.7 FACTORIZACIÓN

Haciendo una analogía con la descomposición de números enteros en producto de sus factores primos, se puede descomponer un polinomio compuesto en producto de polinomios primos.

Un polinomio de P(x) de grado no nulo es primo o irreducible cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado positivo menor que P(x).

Todo polinomio de grado uno es primo o irreducible. Cuando un polinomio no es primo es compuesto.

Factorizar un polinomio significa expresarlo como producto de polinomios primos o irreducibles.

2.8 CASOS DE FACTOREO

1.- Factor común

Cuando P(x) tiene la variable x en todos los términos, se la extrae factor común al menor exponente. Además se extrae factor común el número común en todos los términos. Después se divide cada término del polinomio por el factor común.

Ejemplo:

$$4x^3 - 24x^4 + 16x^6 + 8x^9 = 4x^3(1 - 6x + 4x^3 + 2x^5)$$

2.- Factor común por grupos

Se aplica cuando existe número par de términos y se agrupan de a dos, tres, cuatro, etc., de acuerdo a la conveniencia. Se saca factor común por grupos, variables y/o coeficientes. Luego, se vuelve a extraer factor común del/los factor/es comunes observados.

Ejemplo:

$$3-9x^2+10x^6-30x^8=(3-9x^2)+(10x^6-30x^8)$$
$$=3(1-3x^2)+10x^6(1-3x^2)$$
$$=(1-3x^2)(3+10x^6)$$

3.- Diferencia de cuadrados

Puede expresarse como el producto $x^2-a^2=(x-a).(x+a)$

Ejemplo: $x^2-36=(x-6)(x+6)$

4.- Trinomio de cuadrado perfecto

La expresión factorizada de un trinomio cuadrado perfecto es el cuadrado de un binomio:

$$x^2\pm 2ax+a^2=(x\pm a)^2$$

Ejemplo:

$$x^2-14x+49=x^2-2.7x+7^2=(x-7)$$

5.- Cuatrinomio de cubo perfecto

La expresión factorizada de un cuatrinomio cubo perfecto es el cubo de un binomio

$$x^3\pm 3x^2a+3xa^2\pm a^3=(x\pm a)^3$$

Ejemplo:

$$x^3-6x^2+12x-8=x^3+3.(-2)x^2+3.(-2)^2x+(-2)^2=(x-2)^3$$

6.- Suma o diferencias de bases elevadas a igual potencia

Se aplica cuando se presentan sumas o restas de bases elevadas a igual potencia:

$x^n\pm a^n$ con n natural

excepción cuando n es par y existe suma

Ejemplos:

- Reconocido el caso se busca una raíz.
  $x^4-16^4=x^4-2^4$ 2 es raíz
- Se divide al polinomio por (x-2) empleando la Regla Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{array}$$

$$C(x)=x^3+2x^2+4x+8$$

- Se expresa al polinomio dado como producto de polinomios irreducibles, podemos decir que el polinomio está factoreado.

$$x^4 - 16^4 = (x-2)(x^3+2x^2+4x+8)$$

2.9 EXPRESIONES RACIONALES POLINÓMICAS

De la misma manera que se llaman números racionales a los números de la forma a/b con a y b enteros (b $\neq$ 0), se denominan expresiones racionales a las expresiones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{con } Q(x) \neq 0$$

Siendo $P(x) \;\; y \;\; Q(x)$ polinomios en la variable x.
Ejemplos:

$$\frac{-3x^2+5x-1}{x^3+6x^2+\sqrt{2}}; \quad \frac{-x^2+2x}{2x^3+\sqrt{x}}$$

2.10 SIMPLIFICACIÓN

Al trabajar con expresiones racionales es conveniente simplificarlas y esto es posible cuando existen factores comunes al numerador y al denominador, de lo contrario son expresiones racionales irreducibles.

Ejemplos:

- $\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1)(x+1)} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x+3} \qquad x \neq \pm 1$
- $\dfrac{x+1}{x^2+x} = \dfrac{x+1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} \quad x \neq 0 \text{ y } x \neq -1$
- $\dfrac{x^3-49x}{x^3-14x^2+49x} = \dfrac{x(x^2-49)}{x(x^2-14x+49)} = \dfrac{x(x-7)(x+7)}{x(x-7)^2} = \dfrac{x+7}{x-7} \quad x \neq 0 \text{ y } x \neq 7$

2.11 OPERACIONES

Las expresiones racionales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse.

Ejemplos:

- ✓ $\dfrac{2x-1}{x+2} - \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{2x-1-x+1}{x+2} = \dfrac{x}{x+2}$
- ✓ $\dfrac{-2x^2}{x^2-9} + \dfrac{x^2-3x}{x^2-9} = \dfrac{-2x^2+x^2-3x}{x^2-9} = \dfrac{-x^2-3x}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{-x(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{-x}{(x-3)}$
- ✓ $\left(\dfrac{x^2+4x}{x^2-9}\right).\left(\dfrac{5x-15}{x^3+4x^2}\right) = \dfrac{x(x+4)}{(x-3)(x+3)}.\dfrac{5(x-3)}{x^2(x+4)} = \dfrac{5}{x(x+3)}$
- ✓ $\dfrac{5x+10}{x^2-1} : \dfrac{3x+6}{x+1} = \dfrac{5(x+2)}{(x-1)(x+1)} : \dfrac{3(x+2)}{(x-1)} = \dfrac{5}{3(x+1)}$

2.12 ECUACIONES

Desde la época de los faraones, uno de los objetivos de la Matemática que no ha cambiado es la solución de problemas en los que no se conoce alguna cantidad.
Para resolverlos muchas veces se trabaja con igualdades que relacionan los datos conocidos con los datos desconocidos. El planteo de estas igualdades a partir de un enunciado dado en forma coloquial, exige el conocimiento de un lenguaje simbólico adecuado que, si bien es propio de la Matemática es aplicado a muchas otras ciencias y disciplinas.
Estas igualdades reciben el nombre de ecuaciones. En ellas los datos que se desean averiguar, incógnitas, se suelen representar con letras.
La resolución de ecuaciones ha sido un tema que apasionó a los matemáticos desde el principio de la Historia. Pero hoy utilizan ecuaciones en lo cotidiano, los chicos que necesitan calcular cuántas rifas deben vender para cubrir algún gasto originado por su viaje de egresados, o los comerciantes que deben conocer a cuántos deben vender su mercadería para obtener una cierta ganancia, o en el campo de las ciencias, los antropólogos, para determinar la antigüedad de un resto fósil encontrado; los físicos, cuando calculan el tiempo necesario para que una sustancia radiactiva reduzca su actividad a determinados niveles; los astrónomos para predecir la llegada de algún cometa, etc.
En este apartado se trabajará con lenguaje coloquial, simbólico y gráfico, se buscará cómo resolver ecuaciones y se interpretarán las soluciones obtenidas.[2]

IGUALDAD: Es un conjunto de dos expresiones algebraicas unidas por el signo igual.
Ejemplo: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

IDENTIDAD: Es una igualdad que siempre es cierta cualesquiera sean los valores de las letras que aparecen. El ejemplo anterior es una identidad, pero también las expresiones del tipo
4 = 4 donde no aparece ninguna letra.

ECUACIÓN: Es una igualdad que sólo se verifica para valores concretos de las letras que aparecen, dichas letras se denominan incógnitas.

[2] http://matemolivares.blogia.com/temas/matematicas-y-humor.php

Ejemplo: $2x = \frac{x-7}{5}$

En una ecuación se llama *miembro* a cada una de las expresiones algebraicas que aparece a uno u otro lado del signo igual.
Se denomina *solución*al /los valores de las letras que reemplazados en la ecuación la convierten en un enunciado verdadero.
Dos ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones.
Se estudiarán las ecuaciones con una sola incógnita y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

¡Transeúnte! en esta tumba yacen los restos de Diofanto. De la lectura de este texto podrás saber un dato de su vida. Su infancia ocupó la sexta parte de su vida, después transcurrió una doceava parte hasta que su mejilla se cubrió de vello. Pasó aún una séptima parte de su existencia hasta contraer matrimonio. Cinco años más tarde tuvo lugar el nacimiento de su primogénito, que murió al alcanzar la mitad de la edad que su padre llegó a vivir. Tras cuatro años de profunda pena por la muerte de su hijo, Diofanto murió. De todo esto, dime cuántos años vivió Diofanto.

Epigrama del siglo V o VI d.C. propuesto a modo de ecuación por un discípulo de Diofanto para explicar datos de la vida de este sabio griego:
La necesidad de manifestar simbólicamente los problemas y pensamientos originó el planteamiento de ecuaciones en matemática. El griego de Alejandría, Diofanto, en el siglo III a.C., fue el primero en proponer una notación con símbolos, no solamente lógica, para explicar sus proposiciones matemáticas. De aquí que las primeras ecuaciones algebraicas se denominaron diofánticas.

Clases de ecuaciones

Las ecuaciones algebraicas se clasifican según distintos criterios:

- Según el número de incógnitas: Ecuaciones de una incógnita, de dos, de tres, de n incógnitas.
- Según el término de mayor grado: de primer grado (lineales), segundo grado (cuadráticas), tercer grado (cúbicas), de grado n.
- Según la forma de presentación de las variables: enteras, cuando no existe ninguna incógnita en el denominador; fraccionarias, con incógnitas en algún denominador; racionales, si las incógnitas no aparecen dentro de raíces cuadradas, cúbicas, etcétera, e irracionales, si las incógnitas se presentan dentro de alguna de estas raíces.

<table>
<tr><td rowspan="2">Ecuaciones de una incógnita</td><td>De primer grado:

Se expresa de la forma$ax = b$y se despeja la x.</td></tr>
<tr><td>De segundo grado:

se ponen de la forma $ax^2 + bx + x = 0$ y se aplica la fórmula</td></tr>
</table>

	$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
	Ecuaciones de grado superior a 2. Se factoriza utilizando, si es posible, Ruffini y el Teorema del Resto.
Ecuaciones racionales	**Son las que tienen fracciones algebraicas**. Se resuelven reduciendo las fracciones a común denominador y resolviendo la ecuación polinómica que se obtiene. Pueden introducirse*soluciones extrañas*[1]
Ecuaciones irracionales	**Las incógnitas aparecen dentro de un radical.** Para resolverlas, se aísla el radical y se eleva la ecuación a la potencia conveniente para que desaparezca. Es posible que haya que repetir el proceso *más de una vez*. Pueden introducirse *soluciones extrañas.*

Se dice que una *solución es extraña a una ecuación* cuando se introduce en el proceso de resolución pero *no es válida para resolver la ecuación original*. Siempre que se puedan introducir soluciones extrañas, *hay que comprobar las soluciones que cumplen la ecuación original.* [3]

Propiedades de la igualdad

Para la resolución de ecuaciones algebraicas es preciso tener en cuenta las propiedades elementales de la igualdad:

- Cuando se suma o resta un mismo número a los dos miembros de una ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
- Si los dos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un mismo número, el resultado es también una ecuación equivalente. Cuando se divida tiene que ser por un número distinto de cero.

2.13 ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

La resolución de problemas algebraicos se basa en el concepto de ecuaciones equivalentes. Esta idea tiene particular aplicación en el caso de las ecuaciones lineales o de primer grado en las que sólo existe una incógnita (generalmente denotada por x), siempre en el numerador de los términos y elevada al grado 1.

Un ejemplo de ecuación de primer grado, con una incógnita es

[3]http://usuarios.multimania.es/arquillos/tema05BC.htm

$$3x + 5 = 4(1 - x) + 2x$$

Para resolver las ecuaciones de primer grado con una incógnita, se emplea un procedimiento genérico que se ilustra en el ejemplo adjunto:

Sea la ecuación:

$$\frac{3x}{4} + 4 = 4 \cdot (1 - x) + \frac{4x}{3}$$

Para resolverla se aplican los siguientes pasos:

- Se eliminan denominadores, multiplicando ambos miembros por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores que aparezcan (en el ejemplo, sería 12). Entonces, se obtiene: 9x + 48 = 48 (1 - x) + 16x
- Se eliminan los paréntesis obteniendo: 9x + 48 = 48 - 48x + 16x
- Se agrupan los términos que tengan la incógnita en un miembro y los que no la tengan en el otro, respetando las propiedades de la igualdad. Entonces se obtiene 9x + 48x - 16x = 48 - 48
- Se operan los términos semejantes, obteniendo 41x = 0
- Se resuelve la última ecuación: x = 0
- Se comprueba la solución sustituyéndola por la incógnita en la ecuación inicial.

2.14 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

En el planteamiento de numerosos problemas, como la resolución de triángulos rectángulos o el estudio de movimientos físicos con aceleración, aparecen términos desconocidos elevados al cuadrado. Tales problemas se resuelven por medio de ecuaciones de segundo grado, también llamadas ecuaciones cuadráticas.

Ecuaciones cuadráticas

Se llama *ecuación cuadrática*, o de segundo grado, con una incógnita a toda aquella que tiene la forma general reducida $ax^2 + bx + c = 0$, siendo $a \neq 0$. El coeficiente “a” se denomina cuadrático o principal, b es el coeficiente lineal y c el término independiente.

- Si todos los coeficientes de la ecuación son distintos de cero, se dice que la ecuación es *completa.*

- Si el coeficiente lineal o el término constante son nulos, la ecuación es *incompleta.*

Resolución y discusión de ecuaciones cuadráticas

En el planteamiento de la resolución de una ecuación de segundo grado con una incógnita pueden darse varios casos:

- Si la ecuación es incompleta sin coeficiente lineal ni término independiente ($ax^2 = 0$), la solución es x = 0.
- Cuando es incompleta sin coeficiente lineal ($ax^2 + c = 0$), las raíces son

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{(-c)/a}.$$

- Cuando es incompleta sin término independiente ($ax^2 + bx = 0$), tiene dos raíces:

$x_1 = 0$, y $x_2 = -b/a$.

- Una ecuación completa tiene dos raíces, dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El valor $b^2 - 4ac$ se denomina*discriminante* y de su estudio se deduce que si es mayor que cero, la ecuación tiene dos raíces reales distintas; si es igual a cero, existe una única solución doble dada por $x = -b/2a$, y si es menor que cero, las soluciones pertenecen al conjunto de los *números complejos* (no son reales).

Relación entre las raíces y los coeficientes

Del estudio comparado de las raíces y los coeficientes de una ecuación de segundo grado con una incógnita se extraen algunas conclusiones interesantes:

- La suma de las raíces de la ecuación es igual al coeficiente lineal cambiado de signo dividido por el coeficiente principal: $x_1 + x_2 = -b/a$.
- El producto de las raíces es igual al término independiente dividido por el coeficiente principal: $x_1 . x_2 = c/a$.
- Si se conocen la suma $s = x_1 + x_2$ y el producto $p = x_1 . x_2$ de las raíces de la ecuación, se tiene que: $x^2 - sx + p = 0$.
- Conociendo la diferencia $d = x_1 - x_2$ y el producto $p = x_1 . x_2$ de las raíces, se deduce que: $x^2 \pm \sqrt{4p + d^2}\, x + p = 0.$
- Sabiendo el valor de las raíces x_1 y x_2, la ecuación se puede expresar como un producto de binomios: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (*ecuación factorial*).

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

Objetivos:

- Identificar expresiones algebraicas de las no algebraicas.
- Reconocer los diferentes tipos de expresiones algebraicas.
- Establecer qué tipo de expresiones algebraicas son polinomios.
- Ser hábil en determinar características de los polinomios.
- Aprehender las propiedades de los polinomios.
- Operar correctamente con los polinomios.
- Saber aplicar la Regla de Ruffini y el Teorema del resto.
- Asimilar el concepto de divisibilidad de polinomios.
- Integrar los conceptos de divisibilidad, raíz de un polinomio, Regla de Ruffini y Teorema del Resto.
- Exponer las expresiones algebraicas en sus factores primos aplicando apropiadamente los diferentes casos de factoreo.
- Simplificar las expresiones algebraicas racionales y operar con ellas.
- Adquirir la habilidad para expresar en lenguaje simbólico, expresiones coloquiales.
- Comprender el concepto de igualdad y diferenciar las identidades de las ecuaciones.
- Reconocer las ecuaciones lineales y las ecuaciones cuadráticas.
- Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. Graficarlas.
- Determinar carácter de las raíces sin calcularlas.
- Obtener una ecuación cuadrática dadas sus raíces.
- Resolver ecuaciones racionales e irracionales.
- Resolver situaciones problemáticas de la vida cotidiana.

Actividad 1: Dadas las siguientes expresiones, clasificarlas.

$A(x)=2x^{-3}-x+3$ $\quad B(x)=x^3-x^2+1$ $\quad C(x)=5x^3-x$

$D(x)=\frac{9}{2}x^3+x^2-5x$ $\quad E(x)=\sqrt[3]{x}-1$ $\quad F(x)=\frac{1}{x^2}+x^3-4$

$G(x)=2x^5-4x^4+x^3-\ln 2$ $\quad H(x)=\cos x-\tan x+6$ $\quad I(x)=\ln(x-1)$ $\quad J(x)=e^x+2$

Actividad 2: ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios?

$A(x)=3x^2+5x^3-\frac{1}{2}x$ $\quad B(x)=3x^2+x^{\frac{3}{2}}-\ln 5$ $\quad C(x)=x^3+x^2+x+2$ $\quad D(x)=-5\pi x^3+3\pi x^2-\pi x$

$E(x)=x^{3\pi}-4x^{2\pi}-x^{\pi}$ $\quad F(x)=-2^x-3^x+1^x$ $\quad G(x)=-2x^{-4}+6x^{-3}+5x^2+\frac{1}{2x^5}$ $\quad H(x)=x^4-sen30^{\circ}+x^3$

Actividad 3: De los polinomios dados, especificar el grado y el coeficiente principal, el coeficiente lineal y el término independiente.

$A(x)=5x^2-4,5x^3+x-3$ $\quad B(x)=\frac{5}{2}x^2+2x+e$ $\quad C(x)=-x^2+5x^5-2x^6$ $\quad D(x)=x^7+x^{10}-\pi-3x^5-\frac{2}{3}x$

$E(x)=8x^7-2x^8-6x^5-x$ $\quad F(x)=8x^2-x^3-3x-9$ $\quad G(x)=7x^7-3x^6+9x^5-2$ $\quad H(x)=1,23x^4-\tan 45^{\circ}-4x$

Actividad 4:

a) Indicar cuáles de los polinomios dados son iguales.

$A(x)=2x^2-3x+2$ $\quad B(x)=4x^3+1-5x$

$C(x)=-4x+3+5x^2$ $\quad D(x)=2-3x+2x^2$

$E(x)=-2+5x+6x^3$ $\quad F(x)=4x^3-5x+1$

b) ¿Qué valor deberá tener la constante a para que estos polinomios sean iguales?

$A(x)=x^3-2x^2-2x+1$ $\quad B(x)=(a-2)x^3+(a-5)x^2-(a-1)x+1$

Actividad 5: De las expresiones algebraicas que sean polinomios, determinar el grado y los coeficientes principales y lineales:

$a)\, A(x)=4x^5-2x^7-5x+1$ $\quad c)\, C(x)=6x^8-5x^9+\sin x+3$

$b)\, B(x)=\frac{1}{x}-x^3+2x$ $\quad d)\, D(x)=5x^4-6x^{10}-6x+7$

Actividad 6: ¿Qué propiedades cumplen las operaciones con polinomios?

Actividad 7: A un polinomio P(x) se le suma el opuesto del opuesto de P(x). ¿Qué se obtiene?

Actividad 8: Dar el polinomio opuesto a $P(x)=-\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x-3$.

Actividad 9: Obtener el valor numérico de los siguientes polinomios en los valores de x indicados:

$A(x)=-5x^3+2x^2-3x-1$ en $x=-1$ $\quad B(x)=2x^3-4x^2+x-0,01$ en $x=0,1$

$C(x)=x^5-x^3-x+\frac{1}{64}$ en $x=\frac{1}{2}$ $\quad D(x)=x^6-x^4+x^2-4$ en $x=\sqrt{2}$

Actividad 10:

Siendo $P(x)=2x^2-3x-1;\ Q(x)=-4x^3+6x+2;\ R(x)=-2x-6x^3+4x^2$ realizar las operaciones indicadas:

a) P(x) + Q(x) = b) Q(x) .P(x) = c) [P(x) .Q(x)] – R(x) =

d) 2 P(x) – ½ Q(x) = e) R(x) – 3 Q(x) =

Actividad 11: Si $P(x)=2x^3+4x^2-5;\ Q(x)=3x^4-x^2+x;\ R(x)=x^3-2x$, calcular:

a) P(x) . Q(x) = b) Q(x) - R(x) = c) P(x) . [Q(x) – R(x)] =

d) Q(x) : P(x) = e) Q(x) : R(x) =

Actividad 12: Encontrar el valor numérico del polinomio dado en los valores indicados.

$$P(x)=x^4-5x^3-2x+3 \qquad x_1=1 \quad x_2=-1 \quad x_3=0$$

Actividad 13: Traducir al lenguaje simbólico la siguiente afirmación: "Si la resta entre P(x) y Q(x) es la suma entre P(x) y el opuesto de Q(x), entonces la suma entre P(x) y Q(x), es la resta entre P(x) y el opuesto de Q(x)."

Actividad 14:¿Qué se obtiene al multiplicar un polinomio P(x) por su opuesto?

Actividad 15: Calcular el cociente y el resto de las divisiones indicadas, cuando sea posible, aplicar la Regla de Ruffini. ¿El polinomio P(x) es divisible por Q(x)?

a) $P(x)=2x^7+3x^6+18x^3+29x+10 \qquad Q(x)=2x^2+3x$

b) $P(x)=6x^3-2x^2+4x-1 \qquad Q(x)=x+2$

c) $P(x)=x^6+4x^5-7x^3+2 \qquad Q(x)=x-1$

Actividad 16: Aplicando el teorema del resto, determinar si P(x) es divisible por Q(x).

$$P(x)=-2x^5-4x^4-x^3-8 \qquad Q(x)=x+2$$

Actividad 17: Dado $P(x)=x^3-2x^2+3x-1$, calcular P(2). ¿Cuál es el resto de dividir P(x) por (x-2)?

Actividad 18: Si $T(x)(x+3) = 3x^3+12x^2+3x-18$, determinar T(x).

Actividad 19: Decir si los valores indicados son raíces de los polinomios dados.

a) $P(x)=5x^4+3x^2-8 \qquad x_1=2 \quad x_2=1 \quad x_3=-2$

b) $P(x)=x^2+x^3-2x \qquad x_1=-2 \quad x_2=-1 \quad x_3=1$

Actividad 20: Sin realizar la división, decir si P(x) es divisible por Q(x) sabiendo que $P(x)=x^3-3x^2+x-3,\ Q(x)=x-3$

Actividad 21: Si $Q(x)=2x^3-x^2+3x+b$, ¿qué valor debería tomar b para que 1 sea raíz de Q(x)?

Actividad 22: En una división de polinomios el cociente es $C(x) = 4x^2 - x + 5$ y el resto es $R(x) = 3x - 7$. ¿Cuál es el dividendo si el divisor es $d = x^3 + x - 1$?

Actividad 23:

¿Los valores de $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$ son raíces de $P(x) = 2x^2 - 6x + 4$?

Actividad 24: Se sabe que el polinomio P(x) es divisible por (x-2) y el polinomio cociente que resulta de dividir P(x) por (x-2) es $C(x) = 2x^2 - 2x - 12$.

a) Calcular P(x).
b) Obtener las raíces de P(x).
c) Expresar P(x) en sus factores primos.

Actividad 25: Determinar un polinomio tal que sea de grado 3, sus raíces sean $x_1=1$ y $x_2=2$ y P(0)= 10

Actividad 26:

Factorizar las siguientes expresiones algebraicas en sus factores primos.

$a) 9x + 27 =$

$b) -3x^2 + 12x + 15 =$

$c) 2x^4 - 18x^2 =$

$d) (4x^2 - 4)(x^2 - 9) =$

$e) 5x^4 - 80 =$

$f) x^4 - 81 =$

$g) x^3 - 3x^2 + 5x - 15 =$

$h) x^3 - 3x^2 + 3x - 1 =$

$i) x^2 + 6x + 9 =$

$j) 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 =$

$k) 2x^2 - 8x + 8 =$

$l) x^5 - x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 9x - 9 =$

$ll) x^3 - 8 =$

$n) x^3 - 9x^2 + 27x + 27 =$

$ñ) 9x^4 + 36x^2 + 36 =$

$o) x^5 + 32 =$

$p) x^4 - 81 =$

$r) x^2 - x - 12 =$

$s) 2x^4 - x^3 - 6x^2 =$

Actividad 27: Operar las siguientes expresiones racionales.

$a) \frac{1}{x-5}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}$

$b) \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{7}{12}$

$c) \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{20}$

$d) \frac{x}{x+1}-\frac{2x}{x+3}=-\frac{1}{15}$

Actividad 28: Factorizar las expresiones algebraicas en sus factores primos.

$a) 4x^3+8x^2+8x+16=$

$b) 3x^3-12x=$

$c) x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=$

Actividad 29: Factorizar, simplificar y operar.

$a) \frac{-x^2+4x}{x^2-9}\cdot\frac{5x+15}{x^3-4x^2}=$

$b) \frac{5x+10}{x^2-1}:\frac{3x+6}{x+1}=$

$c) \left(\frac{x-2}{x^2-4}:\frac{x+2}{x^2-x-6}\right)\cdot\left(\frac{x^2-9}{4x-10}\right)=$

$d) \frac{x^3-x^2-2x}{x^2-4}\cdot\frac{(x+2)^2}{3x^2+3x}=$

Actividad 30: Simplificar, en el caso de ser posible,las siguientes expresiones racionales polinómicas y operar.

$a) \frac{2}{x-1}+\frac{5}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$

$b) \frac{3x+4}{x+2}-\frac{3x-5}{x-4}=\frac{12}{x^2-2x-8}$

$c) \frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-1}=\frac{5}{x-3}$

$d) \frac{x}{x^2-9}-\frac{2x}{x+3}=-\frac{1}{x-3}$

$e) \frac{x+5}{x^2-25}+\frac{x+2}{2x^2-6x-20}-\frac{21}{2x+2}=$

$f) \frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x^2-1}=$

$g) \left(\frac{2x+6}{x^2-9}\right)\left(\frac{x+3}{x-7}\right)+\frac{x}{x+7}:\frac{x-7}{5}=$

$h) \frac{3x}{x^2-4}+\frac{x^2+2}{(x-2)(x+2)}-\frac{-3x}{2-x}=$

Actividad 31: Encuentra el/los valores de x para los cuales severifican las siguientes igualdades.

$$a)\ \frac{4+2x}{x^2+8x+16}-\frac{x-4}{(x+4)^2}=\frac{2}{x+4}$$

$$b)\ \frac{2}{x^2-25}+\frac{x+5}{x^2+10x+25}=\frac{x-3}{x^2-25}$$

Actividad 32: Establezca, de ser posible, una relación entre el valor numérico de P(x), la de división de polinomios, la Regla de Ruffini, el resto de la división de P(x) por Q(x), el Teorema del Resto, la divisibilidad de polinomios, las raíces de un polinomio.

Actividad 33: Factorizar, simplificar cuando sea posible y operar.

$$a)\left[\left(\frac{x+4}{x^2-1}\right)\left(\frac{-x+1}{x^2+1}\right)\right]:\left(\frac{-x^2-3x+4}{x^4-1}\right)=$$

$$b)\ \frac{1}{3}+\frac{x+1}{x^3+x^2}+\frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2}=$$

Actividad 34: Escribir en lenguaje simbólico cada una de las expresiones coloquiales:

a) El perímetro de un cuadrado de lado “x”.
b) La edad de Juan dentro de cuatro años, si la actual es x.
c) El área de un rectángulo de 4 cm de base y “x” de altura.

Actividad 35: Determinar cuáles son ecuaciones lineales.

a) $x^2+x-5y+z=0$ d) $\sqrt{3x}-y=4$
b) $x^2+y^2-2xy-10=0$ e) $\sqrt{3}x-2y+5=0$
c) $x+y+z=2$ f) $x+3zy-7=0$

Actividad 36: Resolver las siguientes ecuaciones lineales. Utiliza el software GeoGebra introduciendo cada miembro de la igualdad como una función y verificando en los puntos de intersección de las gráficas las soluciones obtenidas.

a) $x+3=9$ e) $3x-7=2x+6$ i) $2(x+2)=x-5$
b) $x-5=12$ f) $x+3=13-x$ j) $5x-3=3x+1$
c) $x-3=-7$ g) $3(x-1)=2x+7$ k) $2x-7=5x+2$
d) $2x+5=x+11$ h) $3x+2=5$ l) $4(x+2)=3(x-1)$

Actividad 37: Resolver para x

a) $6x+9=2x+1$ b) $2(x+3)=x+5$

Actividad 38: Emplear el discriminante para indicar el carácter de las raíces cuadráticas sin resolverlas. Utiliza el software GeoGebra introduciendo cada miembro de la igualdad como una función para verificar el carácter de las raíces.

a) $x^2-8x+16=0$ c) $x^2+3x+5=0$ e) $x^2+2x-8=0$
b) $9x^2-6x+1=0$ d) $2x^2-x+1=0$ f) $-x^2+2x+15=0$

Actividad 39: Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2-5x+6=0$
b) $x^2-4x+4=0$
c) $x^2-10x=0$
d) $(x+1)(x+2)=0$
e) $(5+x)(x+3)=2$
f) $4x^2=32x-64$
g) $2x^2=x$
h) $2x^2+3x-2=0$
i) $x^2-3x-10=0$
j) $x^2-2x+2=0$
k) $x^2+4x+1=0$
l) $6x^2+2x=-3$
ll) $2-5x+2x^2=0$
m) $2=(2x+5)(x+1)$
n) $(x+1)^2+3x-x^2=3$

Actividad 40: Dadas las raíces de las ecuaciones cuadráticas armar la ecuación cuadrática irreducible.

a) $x_1=2 \quad x_2=-3$
b) $x_1=-1 \quad x_2=4$
c) $x_1=-7 \quad x_2=\dfrac{1}{2}$
d) $x_1=-\dfrac{3}{2} \quad x_2=3$

Actividad 41:

I) Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas. Utiliza el software GeoGebra introduciendo cada miembro de la igualdad como una función y verificando en los puntos de intersección de las gráficas las soluciones obtenidas.

a) $x^2+x=0$
b) $x^2+6x-27=0$
c) $-x^2+1=0$
d) $-2x^2-7x=3$
e) $-x^2+12x-36=0$
f) $4x^2-1=0$

II) ¿Para qué valores de k la ecuación $kx^2-2kx+1=0$ tiene raíces reales iguales, raíces reales distintas y raíces complejas conjugadas?

III) La suma de las raíces de una función cuadrática es -9 y su producto es 20. Escribir la función polinómica considerando que g(-3) = 8. Utiliza el software GeoGebra para verificar las soluciones de la ecuación con la gráfica de la función cuadrática correspondiente.

Actividad 42: Graficar las ecuaciones cuadráticas consideradas como funciones.

a) $y=x^2-8x+16$ b) $y=9x^2-6x+1$

Actividad 43: Resolver las siguientes ecuaciones racionales e irracionales, utiliza el software GeoGebra introduciendo cada miembro de la igualdad como una función y verificando en los puntos de intersección de las gráficas las soluciones obtenidas. No olvides descartar las soluciones extrañas.

a) $\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{15}{3x-1}=8$

b) $\dfrac{x+10}{2x-6}=\dfrac{11-x}{5-x}$

c) $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{20}{x^2-4}$

d) $\dfrac{12}{1-9x^2}=\dfrac{1-3x}{1+3x}+\dfrac{1+3x}{3x-1}$

e) $\dfrac{5}{x^2-4}-\dfrac{8}{x^2-1}=\dfrac{2}{x^2-3x+2}-\dfrac{20}{x^2+3x+2}$

f) $\sqrt{3x+2}=7$

g) $\sqrt{x+6}=x$

h) $\sqrt{2x+9}=x+3$

i) $\sqrt{25-12x}+3x=5$

j) $\sqrt{9-x}+\sqrt{x-1}=4$

$k)\sqrt{4x+3}=\sqrt{5-2x}$

PROBLEMAS

1.- Hallar, si es posible, un número tal que el siguiente del doble sea igual al doble de su siguiente.

2.- En una maqueta debe representarse el piso rectangular de una habitación con 18 cuadritos enteros de 1 cm de lado. ¿Qué medidas podrán tener el largo y el ancho del piso de esa habitación, en la maqueta?

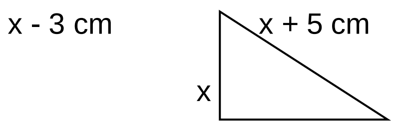
3.- El señor López retiró el 25% de sus ahorros para comprarse una campera cuyo costo es de $250. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado?

4.- Un truco para pensar un número comienza así: piense un número, duplíquelo, súmele 4; multiplique por 3, sume 12; multiplique por 5; sume 300; divida por 10; reste 15; divida por 3 y reste el número que pensó. ¿Cuál es el número?

a) Llame x al número pensado, escriba el cálculo que traduce el enunciado.
b) ¿Cuál es el resultado?

5.- Los lados de un rectángulo miden 25 y 18 cm. Se desea quitar a cada lado un mismo número de centímetros para obtener otro rectángulo de 66 cm de perímetro. ¿Cuánto debe cortarse a cada lado?

6.- Expresar como polinomios el perímetro y el área del siguiente triángulo rectángulo:



7.- La fórmula que relaciona los grados Fahrenheit con los Celsius(centígrados) es: $\frac{2F-160}{9}=C$. Resuélvala para F en función de C.

8.- La longitud de un rectángulo mide 1 centímetro menos que el doble del ancho. El perímetro mide 28 centímetros. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

9.- Calcular los números que cumplen la suma entre el número y la mitad de su cuadrado es igual a 60.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

SOLUCIONES

Actividad 1:

A(x) expresión algebraica fraccionaria   B(x) expresión algebraica entera

C(x)expresión algebraica entera F(x) expresión algebraica fraccionaria

G(x), H(x), I(x) y J(x) son todas expresiones no algebraicas o trascendentes.

Actividad 2:

$\mathrm{A(x), C(x), H(x)}$ y $\mathrm{D(x)}$ son polinomios

Actividad 3:

$gr\ (A) = 3, coef.principal = -4{,}5, coef.lineal = 1, término\ independiente = -3$

$gr\ (B) = 2, coef.principal = 5/2\ , coef.lineal = 2, término\ independiente = e$

$gr\ (C) = 6, coef.principal = -2, coef.lineal = 0, término\ independiente = 0$

$gr\ (D) = 10, coef.principal = 1, coef.lineal = -2/3, término\ independiente = -\pi$

$gr\ (E) = 8, coef.principal = -2, coef.lineal = -1, término\ independiente = 0$

$gr\ (F) = 3, coef.principal = -1, coef.lineal = -3, término\ independiente = 9$

$gr\ (G) = 7, coef.principal = 7, coef.lineal = 0, término\ independiente = 0$

$gr\ (H) = 4, coef.principal = 1{,}23, coef.lineal = -4, tér.independiente = -tg45$

Actividad 4:

a) $\mathrm{A(x)\ =\ D(x), B(x) = F(x)}$ b) $a = 3$

Actividad 5:

a) $gr(A) = 7, coef.principal = -2, coef.lineal = -5$
b) No es un polinomio
c) No es un polinomio
d) $gr(D) = 10, coef\ pricipal = -6\ coef.lineal = -6$

Actividad 7: Se obtiene $O_p = 0$ el polinomio nulo

Actividad 8: $-P(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$

Actividad 9:

$A(-1) = 9, B(0{,}1) = \dfrac{13}{250}, C\left(\dfrac{1}{2}\right) = -0{,}578125, D\left(\sqrt{2}\right) = 2$

Actividad 10:

a) $-4x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

b) $-24x^6 - 16x^5 - 28x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 4x$
c) $-24x^6 - 16x^5 - 28x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 2x$
d) $6x^3 - 9x - 3$
e) $6x^3 + 8x^2 - 20x - 6$

Actividad 11:

a)$6x^7 + 12x^6 - 2x^5 - 17x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x$

b) $3x^4 - x^3 - x^2 + 3x$

c)$6x^7 + 10x^6 - 6x^5 - 13x^4 + 17x^3 + 5x^2 - 15x$

d)$\left(\frac{3}{2}x - 3\right)(2x^3 + 4x^2 - 5) + (11x^2 + \frac{17}{2}x - 15)$

e) $3x(x^3 - 2x) + (5x^2 + x)$

Actividad 12:$P(1) = -3, P(-1) = 11, P(0) = 3$

Actividad 13:$P(x) - Q(x) = P(x) + \left(-Q(x)\right) \rightarrow P(x) + Q(x) = P(x) - (-Q(x))$

Actividad 14:$P(x).[-P(x)] = -[P(x)]^2$

Actividad 15:

a) No es posible realizar la división por Ruffini, pues Q(x) no es de grado 1. $C(x) = x^5 + 9x - \frac{27}{2}$, $R(x) = \frac{-23}{2}x + 10$, luego P(x) no es divisible por Q(x).
b) Si es posible realizar la división empleando Ruffini, $C(x) = 6x^2 - 14x + 32, R(x) = -65,$ luego P(x) no es divisible por Q(x).
c) Si es posible realizar la división empleando Ruffini, $C(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 2x - 2,\ R(x) = 0,$ luego P(x) si es divisible por Q(x).

Actividad 16: $P(-2) = 0, luego\ P(x) si\ es\ divisible\ por\ Q(x)$

Actividad 17: El resto de dividir P(x) entre (x-2) es P(2)=5

Actividad 18: $T(x) = 3x^2 + 3x - 6$

Actividad 19:

a) $x = 1\ es\ raíz$

b) $x = -2$ y $x = 1\ son\ raices.$

Actividad 20: $P(3) = 0 \rightarrow Si\ es\ divisible$

Actividad 21:$Si\ 1\ es\ raíz\ de\ Q(x) \rightarrow Q(1) = 0, entonces\ b = -4$

Actividad 22:

$$Como\ D(x) = C(x).d + R(x) \rightarrow D(x) = (4x^2 - x + 5).(x^3 + x - 1) + (3x - 7)$$

Actividad 23: $x = 2\ sí\ es\ raíz, x = -1\ no\ lo\ es.$

Actividad 24:

a) $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 8x + 24$

b) Raíces $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2$

c) $P(x) = 2(x-3)(x+2).(x-2)$

Actividad 25: $P(x) = x(x-1)(x-2) + 10 = x^3 - x^2 + 10$

Actividad 26:

a) $9(x+3)$
b) $-3(x-5)(x+1)$
c) $2x^2(x-3)(x+3)$
d) $4(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$
e) $5(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)(x-2)$
f) $(x^2+9)(x+3)(x-3)$
g) $(x^2+5)(x-3)$
h) $(x-1)^3$
i) $(x+3)^2$
j) $(7x-5)(x^4+2)$
k) $2(x-2)^2$
l) $(x^2+3)^2(x-1)$
ll) $(x^2+2x+4)(x-2)$
n) $(x-3)^3$
ñ) $9(x^2+2)^2$
o) $(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)(x+2)$
p) $(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)(x-3)$
r) $(x-4)(x+3)$
s) $2x^2(x-\frac{3}{2})(x+1)$

Actividad 27:

a) $\frac{(x-3)(x+7)}{(x-5)(x+3)3}$ b) $\frac{7(x-\frac{10}{7})(x-5)}{(x-1)(x-2).12}$ c) $\frac{-x^2+x-62}{(x-1)(x+2).20}$ d) $\frac{-14\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{15(x+1)(x+3)}$

Actividad 28:

a) $4(x^2+2)(x+2)$ b) $3x(x-2)(x+2)$ c) $(x-\frac{1}{3})^2$

Actividad 29:

a) $\frac{-5x(x^3-4)}{x(x-3)(x-4)}$ b) $\frac{5}{3(x-1)}$ c) $\frac{(x-3)^2(x+3)}{2(x+2)(2x-5)}$ d) $\frac{x+2}{3}$

Actividad 30:

a) $\frac{7}{x+1}$
b) $\frac{-9}{x-4}$
c) $\frac{-4(x^2+\frac{9}{2}x-10)}{(x+2)(x-1)(x-3)}$
d) $\frac{-2x^2+8x+3}{(x-3)(x+3)}$
e) $\frac{-9(x-6)}{(x-5)(x+1)}$

f) $\frac{4}{(x-1)^2(x+1)^2}$

g) $\frac{2x^2+25x+21}{(x-3)(x-7)(x+7)}$

h) $\frac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-2)}$

Actividad 31: a) $x = 0$ b) La expresión es una identidad, tiene infinitas soluciones.

Actividad 32: Si a es un número real, $P(a)$es el valor numérico del polinomio $P(x)$ en a, que arroja como resultado el resto de dividir a $P(x)$ entre $Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio lineal de la forma $(x - a)$. Si $P(a) = 0$, entonces $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ y $x = a$ es una raíz del polinomio $P(x)$.

Actividad 33: a)-1 b)$\frac{4x^2+3}{3x^2}$

Actividad 34: a)$p = 4x$ b)$x + 4 = e$ c)$A = 4x$

Actividad 35: Ecuaciones lineales c-e-f

Actividad 36:

a) $x = 6$ b) $x = 17$ c) $x = -4$ d)$x = 6$ e)$x = 13$ f)$x = 5$

g) $x = 10$ h)$x = 1$ i)$x = -9$ j)$x = 2$ k)$x = -3$ l)$x = -11$

Actividad 37: a)$x = -2$ b)$x = -1$

Actividad 38:a)Raíces reales iguales , b)Raíces reales iguales, c) Sin solución

d) Sin solución real, e) Raíces reales distintas, f)Raíces reales distintas

Actividad 39:

a) $x_1 = 3\ x_2 = 2$
b) $x_1 = x_2 = 2$
c) $x_1 = 0\ x_2 = 10$
d) $x_1 = -1\ x_2 = -2$
e) $x_1 = -4 + \sqrt{3} x_2 = -4 - \sqrt{3}$
f) $x_1 = x_2 = 4$
g) $x_1 = 0\ x_2 = \frac{1}{2}$
h) $x_1 = -2\ x_2 = \frac{1}{2}$
i) $x_1 = 5\ x_2 = -2$
j) Sin solución real
k) $x_1 = -2 + \sqrt{3} x_2 = -2 - \sqrt{3}$
l) Sin solución real
ll) $x_1 = \frac{1}{2} x_2 = 2$
m) $x_1 = -3\ x_2 = -\frac{1}{2}$
n) $x = 2/5$

Actividad 40:

a)$x^2 + x - 6 = 0$ b)$x^2 - 3x - 4 = 0$ c)$x^2 + \frac{13}{2}x - \frac{7}{2} = 0$ d)$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 0$

Actividad 41:

(I) a) $x_1 = 0\ x_2 = -1$ b) $x_1 = 3\ x_2 = -9$ c) $x_1 = 1\ x_2 = -1$

d) $x_1 = -3\ x_2 = -\frac{1}{2}$ e)$x_1 = x_2 = 6$ f)$x_1 = -\frac{1}{2} x_2 = \frac{1}{2}$

(II) Si $k \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ la ecuación tiene dos raíces reales distintas.

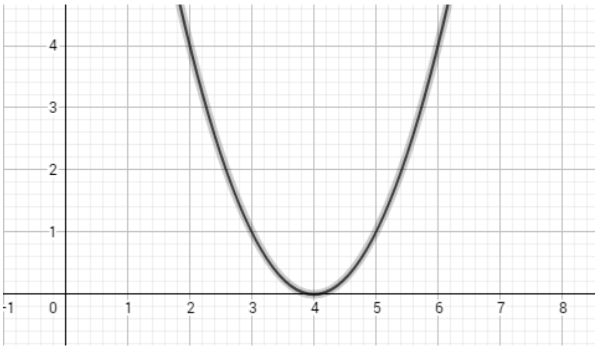
Si $k = 0$ o $k = 1$ la ecuación tiene dos raíces reales iguales.

Si $k \in (0,1)$ la ecuación no tiene raíces reales.

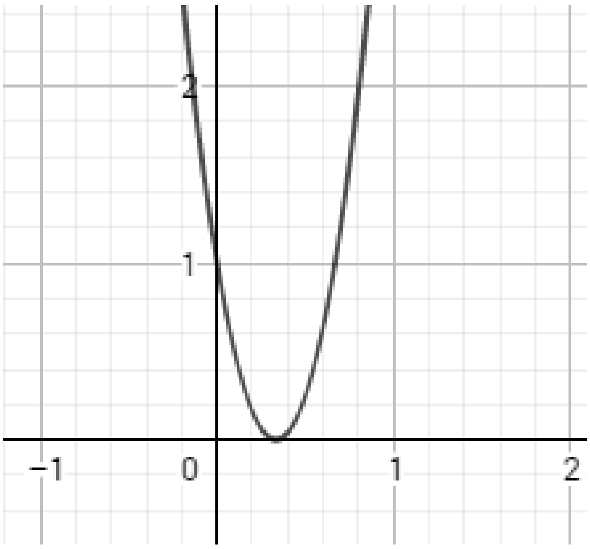
(II) $g(x) = 4(x + 5)(x + 4)$

Actividad 42:

a)



b)



Actividad 43:

a) $x_1 = -\frac{1}{2} x_2 = \frac{4}{3}$ b)$x_1 = 29\ \ x_2 = 4$ c)$x = -2$ pero como -2 anula el denominador, no es una solución de la ecuación original, es una solución extraña.

d) $x = -1$ e)$x_1 = 3\ \ x_2 = \frac{7}{5}$ f) $x = \frac{47}{3}$ g)$x_1 = 3\ \ x_2 = -2$

h) $x_1 = 0\ \ x_2 = -4$ i) $x_1 = 0\ \ x_2 = 2$ j)$x = 5$ k)$x = 1/3$

PROBLEMAS

1.- No tienen solución, ningún número cumple con esas condiciones

2.-$xy = 18$, entonces las posibles medidas para x = largo y = ancho son:

X	**y**
1	18
2	9
3	6
6	3
9	2
18	1

3.- Tenía ahorrados $1000

4.-a) $\left[\frac{5(6x+24)+300}{10} - 15\right] : 3 - x =$ b)9

5.- Deben cortarse 5cm a a cada lado.

6.-$perímetro\ P(x) = (x-3)(x+4)(x+5), área\ A(x) = \frac{(x+4)(x-3)}{2}$

7.-$F = \frac{9C+160}{2}$

8.- ancho 5cm, largo 9cm.

9.- Los números son -12 y 10.

UNIDAD III

Trigonometría

Al finalizar esta unidad, el alumno deberá ser hábil en:

- *Comprender las definiciones de las relaciones trigonométricas de un ángulo.*
- *Comprender la importancia de conocer los valores de las relaciones trigonométricas para diferentes aplicaciones, saber calcularlas.*
- *Conocer y aplicar las identidades trigonométricas.*
- *Recordar los criterios de igualdad y semejanza de triángulos.*
- *Interpretar y resolver problemas de naturaleza geométrica.*
- *Buscar fórmulas que expresen una cantidad en términos de otra.*

3 TRIGONOMETRIA

La palabra trigonometría hace referencia a la medición de triángulos (de origen griego: Trígonos= triángulo, Metría = medida) Es la parte de la Matemática que estudia y analiza la relación que existe entre las medidas de los lados de un triángulo y la medida de sus ángulos. El fin de la trigonometría es resolver triángulos. Un triángulo está constituido por tres lados y tres ángulos.
Es necesario recordar algunos conceptos para obtener mejor comprensión de las funciones trigonométricas y sus aplicaciones.

3.1 TRIÁNGULOS

Los triángulos son polígonos convexos de tres lados, tres ángulos y tres vértices. Se pueden clasificar según la medida de sus lados o según las medidas de sus ángulos. Para la primera clasificación reconocemos triángulos *equiláteros*, donde los tres lados miden lo mismo, en los triángulos *isósceles* dos de sus lados tienen igual medida y los triángulos *escalenos*, donde los tres lados tienen medidas distintas. Para la clasificación según las medidas angulares reconocemos triángulos *rectángulos*, ya que uno de sus ángulos mide 90° (es recto), triángulos *acutángulos* donde los tres ángulos son agudos y triángulos *obtusángulos* que tienen un ángulo obtuso -es decir que mide más de 90°-.
Vale aclarar algunos conceptos de los triángulos rectángulos que estudiaremos principalmente en este apartado. Después de todo en la antigüedad, sobre todo la arquitectura (pirámides, templos, tumbas, etc…) exigió un alto grado de precisión. Para medir alturas, utilizaban la longitud de la sombra y el ángulo de elevación del sol sobre el horizonte. Para esto se utilizó una relación muy conocida, entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, que hoy conocemos como la *relación pitagórica.*

Triángulo rectángulo

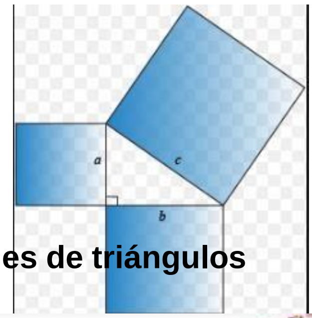
Un triángulo rectángulo es un triángulo con un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo rectángulo se denomina *hipotenusa* y los otros dos lados se llaman *catetos.*
Para iniciar el estudio de trigonometría, es necesario, definir un concepto básico, que es el de ángulo.

Propiedades de los triángulos

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°
- El ángulo exterior de un triángulo (el adyacente a uno de los ángulos interiores) es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos.
- Un lado de un triángulo es menor que la suma de las medidas de los otros dos lados.
- A ángulo menor se opone lado menor y a ángulo mayor se opone lado mayor.

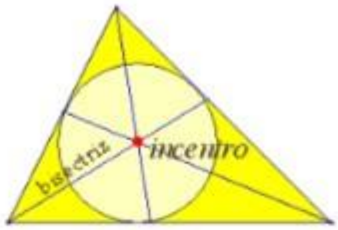
Teorema de Pitágoras

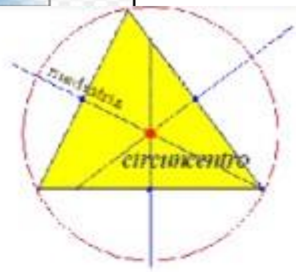
En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Segmentos y puntos notables de triángulos



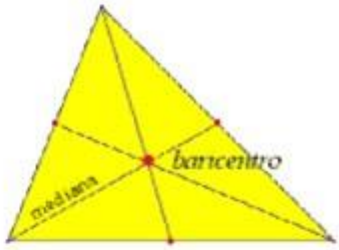


Bisectriz es la semirrecta que divide a un ángulo en dos partes iguales.

Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado Incentro, que es el centro de la circunferencia inscrita.

Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo en su punto medio.

Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto llamado Circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita.



Altura es el segmento perpendicular comprendido entre un vértice y el lado opuesto.

Las alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado Ortocentro.

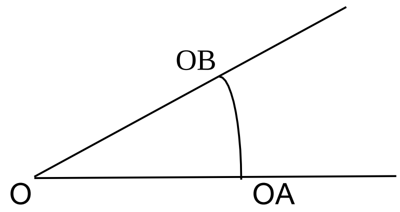
Mediana es el segmento comprendido entre un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Las medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado Baricentro, que es el centro de gravedad del triángulo.

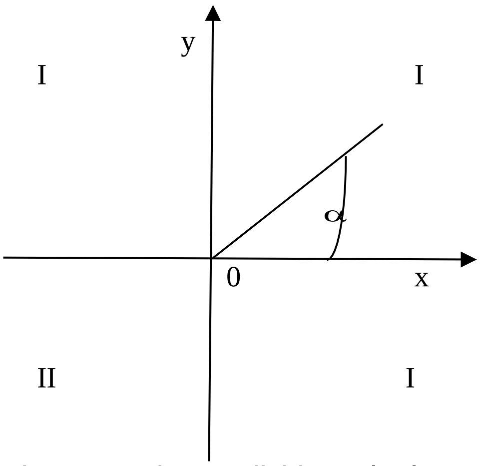
3.2 ÁNGULOS Ángulos

orientados

Se toman dos semirrectas OA y OB, llamando vértice al punto en común O. Si se mantiene fija a la semirrecta OA y se hace girar OB desde la posición inicial OA hasta la posición final OB, se dice que generó un ángulo $\angle AOB$. Es decir, que ángulo es la porción del plano barrida por la semirrecta OA, denominada lado inicial hasta coincidir con la semirrecta OB llamada lado terminal.



Como el ángulo no varía respecto a su posición en el plano, y con el fin de facilitar definiciones, propiedades y cálculos, es conveniente, construir un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de la siguiente forma:
El vértice se ubica en el origen de coordenadas, el punto (0,0) y su lado inicial coincide con el semieje de las abscisas.



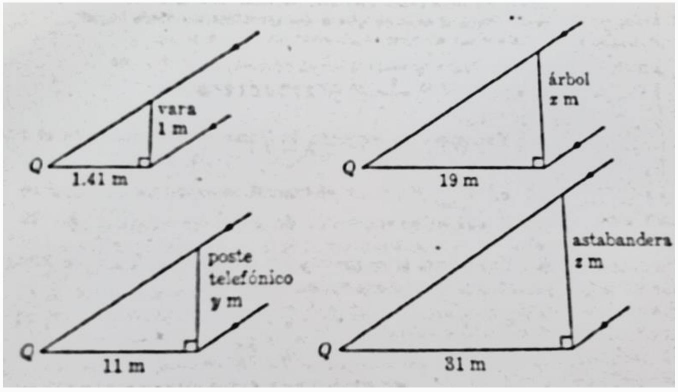
Los ejes coordenados cartesianos dividen al plano en cuatro partes denominadas cuadrantes (I, II, III, IV). Un ángulo pertenece a un determinado cuadrante si el lado terminal del ángulo se encuentra en él.
La magnitud de un ángulo no tiene límite. Si el lado terminal de un ángulo rota en sentido anti horario un giro completo habrá generado un ángulo de 360º. De acuerdo a esto, dos ángulos cuyos lados terminales e iniciales coinciden, se encuentran en la misma posición pero pueden diferenciarse en cuanto a la cantidad de giros rotados; es decir: $\alpha + 360^{o} = \beta$
Por lo tanto:

Dos ángulos orientados son iguales si y sólo si están generados por la misma rotación.

3.3 RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

Razones trigonométricas del triángulo rectángulo

Supongamos que en un día soleado algunos estudiantes miden las longitudes de las sombras que proyectan varios objetos verticales sobre un piso, plano horizontal, tomando las medidas a la misma hora, y que después dibujan esquemas como los que aparecen a continuación.



Para todos los fines prácticos se puede considerar que los rayos del Sol son paralelos y, por consiguiente, los ángulos Q de las figuras serán iguales, puesto que todos los rayos tienen el mismo ángulo de inclinación. Los triángulos son rectángulos ya que los objetos son perpendiculares al piso. Como los triángulos que tienen dos ángulos iguales son semejantes, tendremos que los cuatro triángulos son semejantes, y se pueden escribir las proporciones siguientes:

$\frac{x}{19} = \frac{1}{1.41}$, $\frac{y}{11} = \frac{1}{1.41}$, $\frac{z}{31} = \frac{1}{1.41}$, ya que $\frac{1}{1.41} = 0.71$ aproximadamente, tendremos que $\frac{x}{19} = 0.71$ luego $x = 13.49$, $\frac{y}{11} = 0.71$ luego $y = 7.81$, $\frac{z}{31} = 0.71$ luego z=22.01

Las alturas de los objetos son, aproximadamente, árbol: 13.5m, poste: 7.8m, astabandera: 22m.

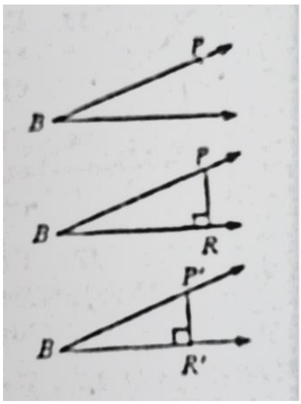
Nótese que aun cuando las longitudes de los catetos de los cuatro triángulos rectángulos difieren en todos los casos, están sin embargo, en la misma razón 1 : 1,41. Se podría predecir que si se tomaran las medidas de un quinto objeto y de su sombra a la misma hora en que se tomaron las anteriores, se obtendría la misma razón.

El número $\frac{1}{1.41}$ se llama *tangente* del ángulo Q $(\tan Q)$

Si los estudiantes efectuaran nuevas mediciones dos horas más tarde, cuando el Sol estuviera más alto en el cielo, la longitud de las sombras y el ángulo de inclinación de los rayos del Sol serían diferentes; no obstante, la altura de los objetos verticales no variaría.

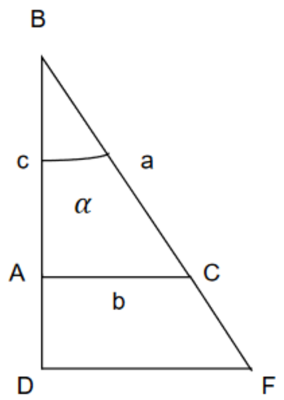
Los estudiantes descubrirían que al nuevo ángulo se asocia un número diferente.

Todo ángulo agudo tiene una tangente. Considérese, por ejemplo, el ángulo B. Si de un punto cualquiera P, en uno de sus lados, se traza una perpendicular, $\overline{R}$al otro lado, la tangente del $\measuredangle B$ es $\frac{PR}{BR}$, si de manera similar, se traza una nueva perpendicular que pase por un punto P´, la tangente del ∡B es $\frac{P'R'}{BR'}$. Sin embargo, como los triángulos son semejantes, de acuerdo con el postulado AA, los lados homólogos son proporcionales y $\frac{PR}{BR} = \frac{P'R'}{BR'}$. Entonces la tangente de un ángulo dado es un número único; es decir, existe solamente un número que es la tangente de un ángulo agudo dado.



Cuando un ángulo α es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, la tangente del ángulo α es la razón de la longitud de del cateto opuesto a la longitud del cateto adyacente.

El ángulo indicado es$< DBF = \alpha$



Dado cualquier triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ se pueden plantear las siguientes razones

(cocientes) trigonométricas entre sus lados:

$$\frac{b}{a} \quad \frac{c}{a} \quad \frac{b}{c}$$

Dado un triángulo rectángulo semejante al $\overset{\Delta}{ABC}$, como el $\overset{\Delta}{DBF}$, se cumple lo siguiente:

$$\frac{b}{a} = \frac{DF}{BF} \qquad \frac{c}{a} = \frac{BD}{BF} \qquad \frac{b}{c} = \frac{DF}{BD}$$

Ya que los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales.
De acuerdo a esto, se puede afirmar que:

Las razones o cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo no dependen de la longitud de los lados, sino de la medida del ángulo, y se las denomina razones trigonométricas.

Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo pueden definirse como:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \qquad \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{a}{c}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

Relación entre las razones trigonométricas

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

Ecuación fundamental de la trigonometría: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

3.4 SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

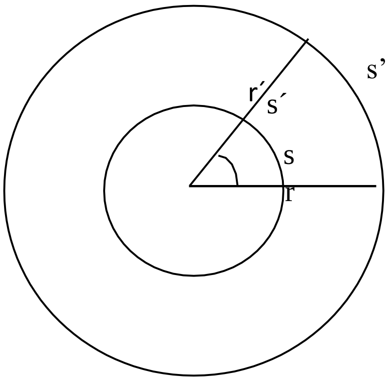
La medida del ángulo será positiva si el lado terminal rota en sentido contrario a las agujas del reloj, y negativo si rota en sentido horario.
Se utilizan generalmente dos sistemas de medición a saber: sistema sexagesimal y sistema radial.

Sistema sexagesimal

Es un sistema muy antiguo utilizado por los babilonios, ellos pensaban que el año tenía 360 días, lo que los llevó a pensar que podían emplear como unidad angular la 360 -ava parte de un ángulo de un giro.
La unidad de este sistema es el grado (°) que se obtiene de dividir la circunferencia en 360 partes iguales. El ángulo recto mide 90° y la novena-ava parte de un ángulo recto representa un grado sexagesimal. Cada grado está dividido en 60 minutos y se denota 1° = 60' y cada minuto comprende 60 segundos y se escribe 1'= 60''. La calculadora científica trabaja este sistema en modo DEG.

Sistema radial

Los ángulos en este sistema se miden en radianes que son números reales. Existe una relación biunívoca entre los números reales y los radianes, es decir, entre el sistema numérico y el sistema circular, cada número real representa un ángulo en radianes y cada ángulo en radianes representa un número real.
La unidad es el radián (rad), unidad oficial del SI y del SIMELA. El modo RAD es el que se coloca en la calculadora.



La medida de un ángulo en radianes (rad) se define como $\theta = \frac{s}{r}$, donde s es la longitud del arco que comprende el ángulo y r es el radio.
Este sistema se basa en que dado un ángulo la relación entre s y r es constante e independiente del radio, s y r deben estar en la misma unidad de longitud.
Un radián es aquel ángulo cuya longitud de arco es igual a la longitud del radio.
La longitud de la circunferencia es $2\pi r$, si se divide por r da como resultado que 360° equivale a:

$$\alpha(rad) = \frac{arco}{radio} = \frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$$

$$360° = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi = 6,28...(rad)$$

$$180° = \pi = 3,14159(rad)$$

$$1° = \frac{\pi}{180}(rad) \cong 0,0174 \qquad 1(\text{rad}) = \frac{180°}{\pi} \cong 57,296° \cong 57°17'45''$$

OBSERVACIÓN: El número π≅ 3,14159… representa un número irracional y no es un ángulo de 180°. La palabra radián es un nombre y no una unidad (seudo-unidad), ya que el cociente arco/radio es adimensional, por lo tanto no es necesario colocar (rad) a continuación del número, excepto que sea necesario aclarar que se trata de la medida de un ángulo.

Ángulos complementarios

Dos ángulos son complementarios si y si solo si su suma es igual a 90°.

Ángulos suplementarios

Dos ángulos son suplementarios si y solo si su suma es igual a 180°.

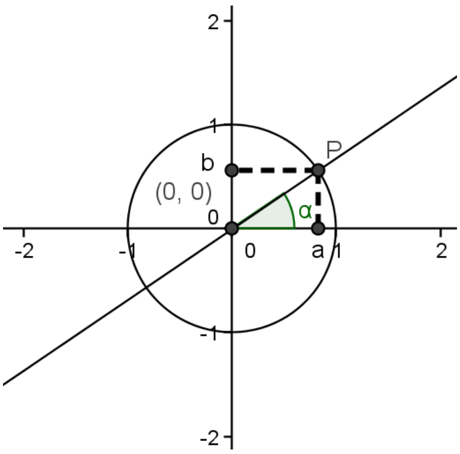
Circunferencia trigonométrica

Circunferencia que tiene centro en el origen de coordenadas y su radio es igual a la unidad.

Razones trigonométricas de una circunferencia trigonométrica

Hasta ahora trabajamos siempre con ángulos agudos, puesto que cateto e hipotenusa sólo pueden referirse a ángulos no rectos de un triángulo rectángulo, pero si un ángulo es obtuso, entonces no podría construirse ningún triángulo rectángulo que tuviera un ángulo agudo. Para poder extender la definición de las relaciones trigonométricas a cualquier ángulo, es necesario trabajar con un sistema de ejes cartesianos $(O, \vec{x}, \vec{y})$, una

circunferencia con centro en el origen de coordenadas (0,0) y cuyo radio mide 1 unidad de longitud.
Si trazamos un ángulo agudo α haciendo coincidir el vértice con O, uno de sus lados con el eje x, el otro lado del ángulo intersecará a la circunferencia en un punto P de coordenadas (a,b)
Como el sistema cartesiano es rectangular, al trazar la perpendicular al eje x desde el punto P, se determina un triángulo rectángulo.

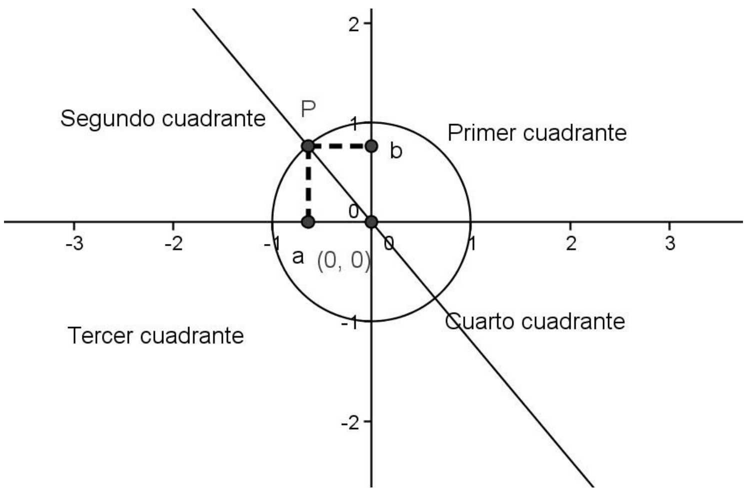


$$\boldsymbol{sen}\, a = \boldsymbol{b}$$

$$\mathbf{cos}\, a =$$

$$\mathbf{tan}\, a = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$$

Dado que el mismo triángulo con ángulo α construido en cualquier otra circunferencia sería semejante a este, nos resulta más conveniente para simplificar los cálculos trabajarcon un triángulo cuya hipotenusa mida 1 unidad de longitud.
A esta circunferencia, cuyo radio es 1, se la llama *circunferencia trigonométrica*.
De la misma manera se definen el seno, el coseno y la tangente para los ángulos de cualquier cuadrante.



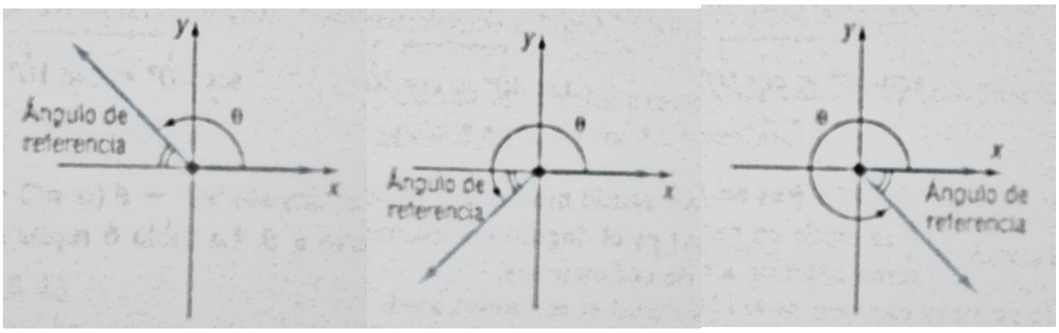
$$\boldsymbol{sen}\, a = \boldsymbol{b}$$

$$\mathbf{cos}\, a = -$$

$$\mathbf{tan}\, a = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$$

Ángulo de referencia

Sea θ un ángulo no agudo donde su vétice coincide con O (0,0), uno de sus lados coincide con el eje x y el otro lado esté en un cuadrante que no es el primero. El ángulo agudo formado por el lado final de θ y la parte positiva o la negativa del eje x, es llamado ángulo de referencia para α.



Un ángulo de referencia siempre es un ángulo agudo, cuya medida está entre 0° y 90°. Para poder calcular las razones trigonométricas de ángulos obtusos, utilizaremos la medida del ángulo de referencia, puesto que los valores de éstas serán los mismos que los del ángulo de referencia y sólo varía el signo (+/-).Lo haremos de la siguiente manera, según el cuadrante en que se encuentre el segundo lado del ángulo obtusoθ.

- Si el segundo lado del ángulo θ se encuentra en el segundo cuadrante, debemos realizar una reflexión axial de ese rayo, respecto del eje y. El ángulo que se forma entre el eje positivo x y la imagen del rayo reflejado, es un ángulo que tiene la misma medida que el ángulo de referencia. Los valores de sen, cos, tan, etc… del ángulo de referencia serán los mismos que sen, cos, tan, etc… del ángulo θ, sólo cambian el signo.

- Si el segundo lado del ángulo θ se encuentra en el tercer cuadrante, debemos realizar una reflexión central de ese rayo, respecto del centro de coordenadas -el punto (0,0)- El ángulo que se forma entre el eje positivo x y la imagen del rayo reflejado, es un ángulo que tiene la misma medida que el ángulo de referencia. Los valores de sen, cos, tan, etc… del ángulo de referencia serán los mismos que sen, cos, tan, etc… del ángulo θ, sólo cambian el signo.

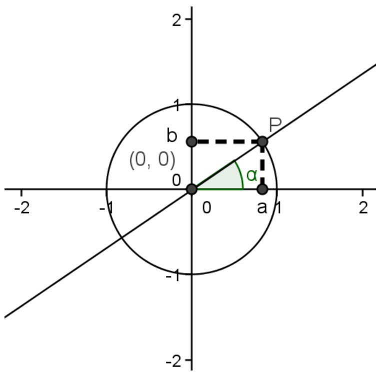
- Si el segundo lado del ángulo θ se encuentra en el cuarto cuadrante, debemos realizar una reflexión axial de ese rayo, respecto del eje x. El ángulo que se forma entre el eje positivo x y la imagen del rayo reflejado, es un ángulo que tiene la misma medida que el ángulo de referencia. Los valores de sen, cos, tan, etc… del ángulo de referencia serán los mismos que sen, cos, tan, etc… del ángulo θ, sólo cambian el signo.

Por ejemplo, para un ángulo de 150°, el ángulo de referencia medirá 30°.

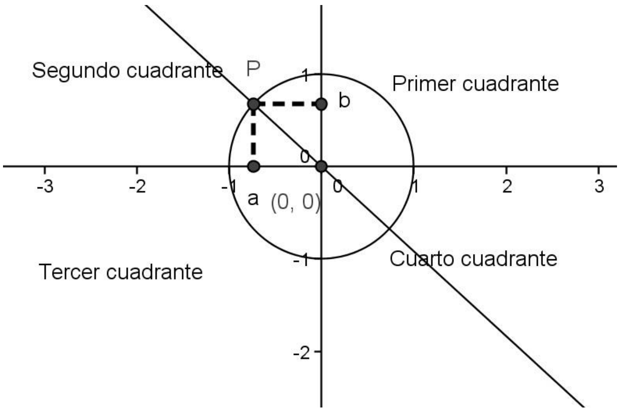
De este modo es posible calcular ahora razones trigonométricas para ángulos no agudos, por ejemplo, si deseamos calcular el seno, coseno y tangente de un ángulo obtuso, podremos verificar que tiene la misma medida que seno, coseno y tangente del ángulo de referencia, pero teniendo cierto cuidado con el signo de estas razones.

Supongamos que construimos un ángulo obtuso sobre un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, donde hemos construido la circunferencia trigonométrica, haciendo coincidir uno de los lados del ángulo con el eje positivo x, según el cuadrante en que interseque el otro lado del ángulo a la circunferencia trigonométrica, será el signoque cada razón asuma.

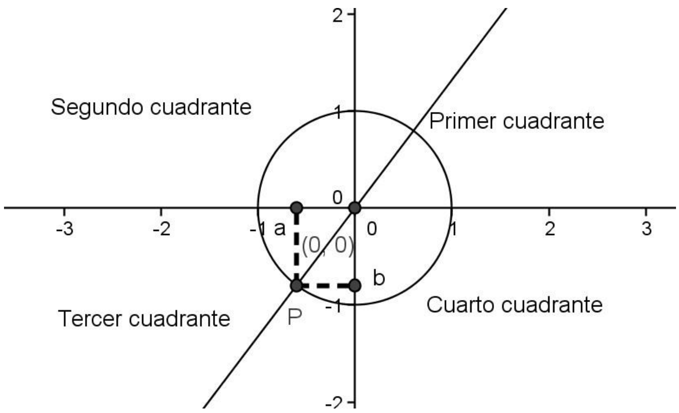
- En el primer cuadrante, como las coordenada de P(a,b) son ambas positivas, entonces todas las razones trigonométricas son positivas.



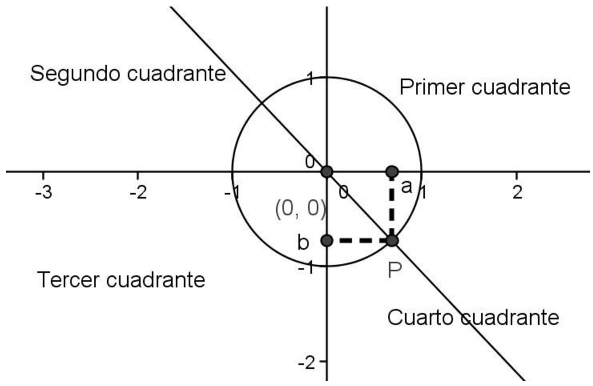
- En el segundo cuadrante, el valor de b es positivo, mientras que a es negativo; entonces el seno es positivo, pero coseno y tangente son valores negativos.



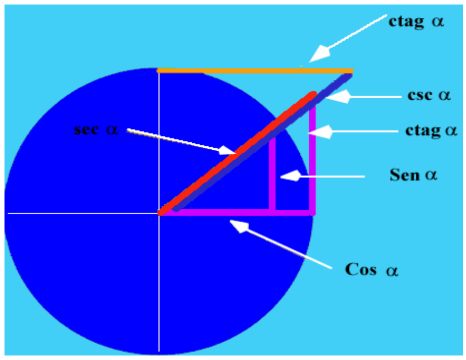
- En el tercer cuadrante, ambas coordenadas a y b, son negativas, por lo tanto seno y coseno de los ángulos de este cuadrante también lo son, pero la tangente asume un valor positivo.



- En el cuarto cuadrante, como los valores de b son negativos y los de a son positivos, el seno y la tangente son negativos y el coseno positivo.



En el siguiente gráfico, se puede observar los segmentos que representan a cada una de las líneas trigonométricas:



El siguiente cuadro expresa los valores de las líneas trigonométricas de ciertos ángulos

Radianes	Grados sexag.	seno	coseno	tangente	cosecante	secante	cotangente
0	0^o	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	0	$\nexists(\pm\infty)$	1	$\nexists(\pm\infty)$
$\frac{1}{6}\pi$	30^o	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	45^o	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	60^o	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	90^o	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\nexists(\pm\infty)$	1	$\nexists(\pm\infty)$	0

Signos de las razones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica

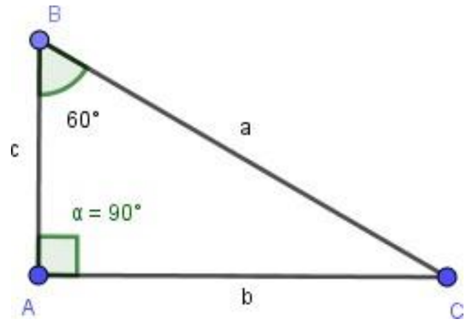
El $sen\ \theta$ y el $\cos\theta$ toman valores entre -1 y 1. La $tg\ \theta$ toma valores entre $-\infty$ y ∞. La cotangente varía también entre $-\infty$ y ∞. La secante y la cosecante toman valores mayores e igual 1 y menores e igual a -1.

razón / cuadrante	I	II	III	IV
$sen\ \theta$	+	+	-	-
$\cos\ \theta$	+	-	-	+
$tg\ \theta$	+	-	+	-

4.4 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo significa encontrar las medidas de sus seis elementos (los tres lados y los tres ángulos). Para hallar estas medidas es necesario establecer los elementos desconocidos de acuerdo a ciertos datos y relaciones entre ellos. Se puede expresar que para resolver un triángulo rectángulo es suficiente tener como datos dos de sus elementos, de los cuales uno debe ser necesariamente un lado.

Ejemplo 1: Se tiene un triángulo rectángulo con los siguientes datos
$\beta = 60^o$ (ángulo $\widehat{ABC}$) y $a = 2cm$. Resolver dicho triángulo.



Para recordar:

- En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores suman 180 grados.
- En un triángulo rectángulo la suma de dos ángulos agudos da un ángulo recto.

Se calculan los elementos restantes:

$$\boxed{\alpha = 180^o - (90^o + 60^o) = 180^o - 150^o = 30^o}$$

Para obtener el cateto b, se sabe que:

$$\boxed{sen\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a.sen\beta = 2cm.sen30^o = 2cm.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\ cm}$$

Se calcula el cateto c:

$$\boxed{\cos\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a.\cos\beta = 2cm.\left(\frac{1}{2}\right) = 1\ cm}$$

El perímetro del triángulo es la suma de los lados:

$$\boxed{P = a + b + c = \left(2 + \sqrt{3} + 1\right)cm = \left(3 + \sqrt{3}\right)cm}$$

El área del triángulo es:

$$\acute{A}rea = \frac{bxc}{2} = \frac{\sqrt{3}x1cm^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}cm^2$$

Ejemplo 2: Resolver el triángulo rectángulo cuyos datos son: a=10 cm y b=6 cm (considerar el gráfico del ejemplo anterior).

Aplicando el Teorema de Pitágoras, se puede calcular c:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$c = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8\ cm$$

Para calcular el ángulo $\hat{B}$, se utiliza la línea trigonométrica seno del ángulo:

$$sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \hat{B} = ar\cos en\ \frac{b}{a} = ar\cos en\ \frac{6}{10} = ar\cos en\ \frac{3}{5} = 36^{\circ}\,52'12''$$

Al calcular el ángulo $\hat{C}$ se pueden seguir dos caminos:

1.- Empleando la línea trigonométrica del coseno:

$$\cos\ \hat{C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \hat{C} = \arccos\frac{c}{b} = \arccos\frac{8}{10} = \arccos\frac{4}{5} = 53^{\circ}\,7'48''$$

2.- O utilizando que en todo triángulo rectángulo la suma de dos ángulos agudos da un ángulo recto:

$$\hat{C} = 90^{\circ} - \hat{B} = 90^{\circ} - 36^{\circ}\,52'12'' = 53^{\circ}\,7'48''$$

El perímetro del triángulo es: $P = a + b + c = (10+6+8)cm = 24\ cm$

El área del mismo es: $\acute{A}rea = \frac{bxc}{2} = \frac{6x8}{2}cm^2 = \frac{48}{2}cm^2 = 24\ cm^2$

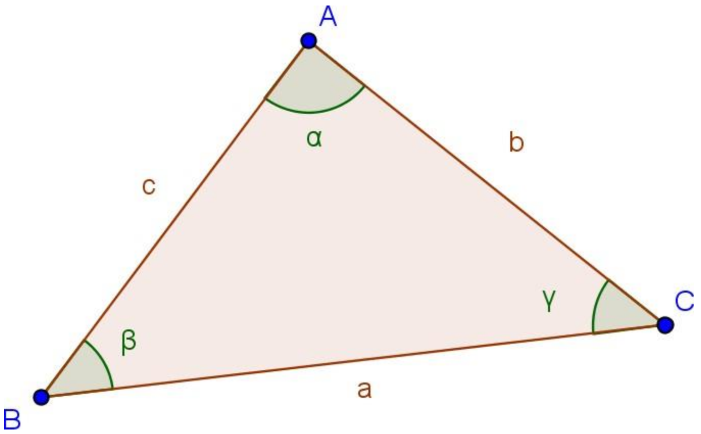
4.6 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

En el caso de tener que resolver triángulos no rectángulos, se utilizan dos teoremas: Teorema del seno y Teorema del coseno.

Teorema del seno

Dado un triángulo cualquiera con ángulos α, β, γ y donde la medida de los lados sean los números a, b, c respectivamente opuestos a dichos ángulos, se verifica que

$$\frac{sen\,\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\,\gamma}{c}$$



JUSTIFICACIÓN

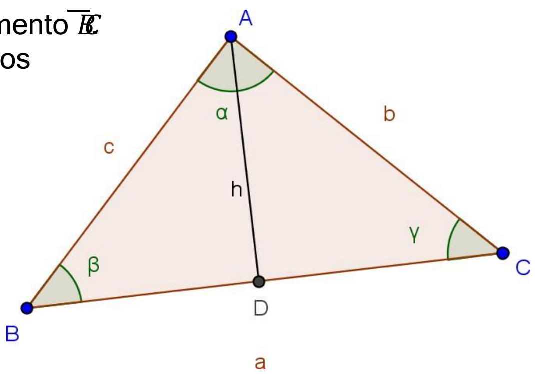
Sea ABC un triángulo cualquiera, donde se ha trazado una de sus alturas.
Sea D el pie de la perpendicular trazada desde A al segmento $\overline{BC}$
Si calculamos el $sen\beta$ y $sen\gamma$, en los triángulos rectángulos BDA y CDA, obtenemos:

$$sen\beta = \frac{h}{c} \quad h = c.\,sen\beta$$

$$sen\gamma = \frac{h}{b} \quad h = b.\,sen\gamma$$

Si igualamos h, obtenemos:

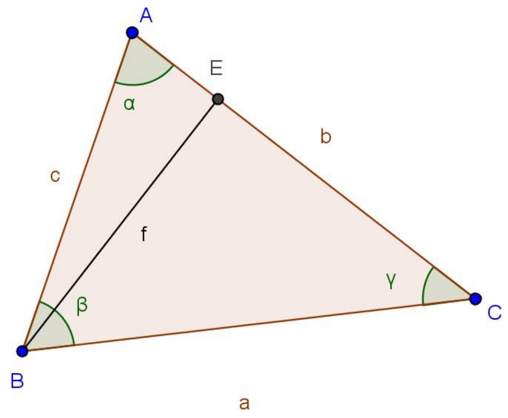
$$c.\,sen\beta = b.\,sen\gamma$$



Multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{c}\, y\, \frac{1}{b}$, así $\frac{1}{c}.\frac{1}{b}.\,c.\,sen\beta = \frac{1}{c}.\frac{1}{b}.\,b.\,sen\gamma$

Simplificando tenemos que: $\frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}$

Si llamamos f a la medida de la altura trazada desde el vértice B, al segmento $\overline{AC}$, y considerando los triángulos rectángulos BAE y BCA, podemos calcular $sen\alpha = \frac{f}{c}$ y $sen\gamma = \frac{f}{a}$, despejando f e igualando, obtenemos que: $\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\gamma}{c}$



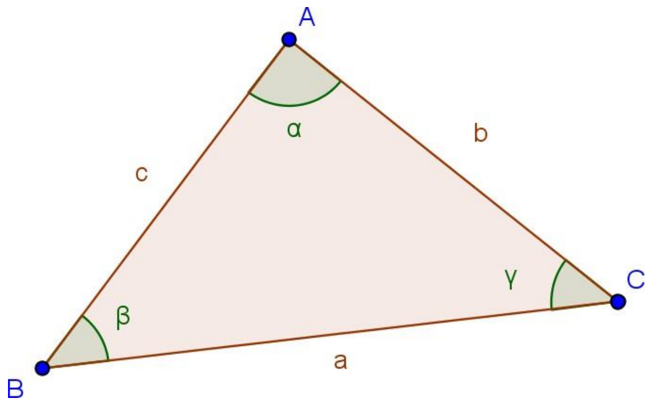
Finalmente

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}$$

Teorema del coseno

Dado un triángulo cualquiera con ángulos α, β, γ y lados de medidas a, b, c, respectivamente opuestos a dichos ángulos, se verifica que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.\cos\gamma\,.\,a.\,b$$
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2.\cos\alpha\,.\,c.\,b$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.\cos\beta\,.\,a.\,c$$



JUSTIFICACIÓN

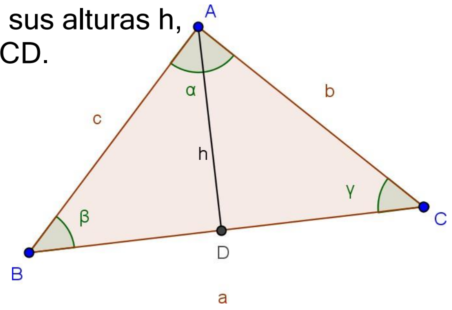
Consideremos un triángulo cualquiera ABC y tracemos una de sus alturas h, formándose de este modo dos triángulos rectángulos ABD y ACD.
Sea x la proyección del segmento $\overline{BA}$ sobre $\overline{BC}$
Si calculamos seno y coseno del ángulo β obtenemos:

$sen\beta = \frac{h}{c}$ y $\cos\beta = \frac{x}{c}$

A partir de estas ecuaciones despejamos las medidas h y x

$h = c.\,sen\beta$

$x = c.\cos\beta$



Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo CDA, tendremos que:
$b^2 = h^2 + (a - x)^2$ahora reemplazando h y x, por sus expresiones equivalentes, obtenemos:
$b^2 = (c.sen\beta)^2 + (a - c.cos\beta)^2$, entonces $b^2 = c^2.sen^2\beta + a^2 - 2.a.c.\cos\beta + c^2.cos^2\beta$
Si sacamos c^2 como factor común, la expresión queda de la siguiente forma

$$b^2 = c^2.(sen^2\beta + cos^2\beta) + a^2 - 2.a.c.\cos\beta$$

Como $(sen^2\beta + cos^2\beta) = 1$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2.a.c.\cos\beta$$

De forma análoga se termina la demostración al llegar a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.\cos\gamma\,.a.b$$

$a^2 = c^2 + b^2 - 2.\cos\alpha\,.c.b$

Identidades trigonométricas

En la práctica es frecuente hallar problemas que incluyen dos o más ángulos y que comúnmente están relacionados con operaciones aritméticas (suma o resta de dos ángulos, múltiplos o fracciones de ángulos, etc.). Encontrar los valores de las funciones trigonométricas en estos casos, es todo un arte; en su desarrollo entran en juego el manejo y conocimiento de las identidades trigonométricas.
Recordemos que: una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que puede involucrar funciones trigonométricas o de otro tipo, y que puede o no tener solución;por el contrario una identidad es un caso particular de ecuación que es cierta para todos los valores de la variable.
Las siguientes identidades se conocen como identidades pitagóricas:

$$a)\ sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$b)\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$c)\ 1 + \cot^2\theta = \cos e c^2\theta$$

Otras identidades a tener en cuenta:

$$a)\ \cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$b)\ sen(-\theta) = -sen\theta$$
$$c)\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha.\cos\beta \mp sen\alpha.sen\beta$$
$$d))sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha.\cos\beta \pm \cos\alpha.\cos\beta$$
$$e)\ \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\,\tan\beta}$$

Existen muchas otras identidades trigonométricas que no son tan frecuentes y a las que se pueden acceder con facilidad en cualquier libro de matemática que incluya identidades trigonométricas.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

Objetivos:

- Utilizar correctamente el sistema sexagesimal y radial, realizar el pasaje de un ángulo expresado en un sistema a otro.
- Aprehender las definiciones de las relaciones trigonométricas de un ángulo.
- Comprender la importancia de conocer los valores de las relaciones trigonométricas para diferentes aplicaciones, saber calcularlas.
- Conocer y aplicar las identidades trigonométricas.
- Recordar los criterios de igualdad y semejanza de triángulos.
- Interpretar y resolver problemas de naturaleza geométrica.
- Buscar fórmulas que expresen una cantidad en términos de otra.
- Graficar funciones trigonométricas e interpretar las gráficas obtenidas.
- Resolver problemas de aplicación.

Actividad 1:

I) Decir a qué cuadrante pertenece cada uno de los ángulos dados.

a) $\alpha = 34^{\circ}$	b) $\delta = 126^{\circ}$	c) $\varphi = -260^{\circ}$
d) $\beta = -58^{\circ}$	e) $\gamma = 210^{\circ}$	f) $\varepsilon = 300^{\circ}$

II) Completar el siguiente cuadro:

SISTEM ÁNG.	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}
Sexagesimal	0°	1°		45°		60°		120°	135°		270°	290°
Circular			$\frac{\pi}{3}$		1		$\frac{\pi}{2}$			$\frac{11}{6}\pi$		

III) a) Determinar los ángulos cuadrantales en los dos sistemas de medición de ángulos.

Actividad 2: Determinar en qué cuadrante se encuentra el ángulo de acuerdo a los datos dados.

a) $\text{sen}\alpha > 0$ y $\cos\alpha < 0$ b) $\text{sen}\alpha < 0$ y $\cos\alpha > 0$

c) $\text{tg}\alpha < 0$ y $\text{cosec}\alpha > 0$ d) $\text{cotag}\alpha > 0$ y $\sec\alpha < 0$

e) $\sec\alpha < 0$ y $\text{cosec}\alpha < 0$ f) $\cos\alpha < 0$ y $\text{cosec}\alpha < 0$

II) Averiguar cuál es el ángulo que se pide según las condiciones especificadas:

a) $\text{sen}\ \alpha = 0,707$ $\alpha\ \varepsilon$ I cuadrante b) $\text{tg}\ \alpha = 1,191$ $\alpha\ \varepsilon$ III cuadrante

c) $\cos\ \alpha = -0,707$ $\alpha\ \varepsilon$ II cuadrante d) $\text{sen}\ \alpha = -0,5$ $\alpha\ \varepsilon$ IV cuadrante

Actividad 3: Dibuja un ángulo orientado positivo y que su lado terminal esté en el tercer cuadrante y otro ángulo orientado negativo y que esté en el segundo cuadrante.

GG Utiliza GeoGebra para y realiza con el mismo la actividad anterior, luego realiza las transformaciones necesarias (reflexión axial/central) para calcular los valores de las razones trigonométricas, en la circunferencia unidad.

Actividad 4: ¿A qué cuadrante pertenece el ángulo Θ para que se cumplan las siguientes condiciones?

a) $\cos\Theta > 0$ y $\text{tg}\ \Theta < 0$ b) $\text{sen}\Theta < 0$ y $\sec\Theta < 0$

Actividad 5: Calcular el valor del ángulo sabiendo a qué cuadrante pertenece

a) $\text{sen}\ \Theta = 0,5$ $\Theta\ \varepsilon$ IV cuadrante b) $\text{tg}\ \Theta = -1$ $\Theta\ \varepsilon$ II cuadrante

Actividad 6: Encontrar los valores del seno, el coseno y la tangente de los ángulos agudos del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 5 cm.

Actividad 7: Encontrar los elementos restantes del triángulo con vértices A, B y C, si conocemos $\angle C$ = 90°, a = 15, c = 45.

Actividad 8: Encontrar los catetos del triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 12 cm y un ángulo agudo mide 12°.

Actividad 9: ¿Cuáles de los siguientes pueden ser longitudes de los lados de un triángulo rectángulo?

a) a = 5, b = 12, c = 13 b) a = 15, b = 8, c = 17 c) a = 7, b = 9, c = 10

d) a = $\sqrt{2}$, b = $\sqrt{3}$, c = $\sqrt{5}$

Actividad 10: Sea α un ángulo cuyo lado terminal pasa por el punto P(-3,4), calcular seno, coseno y tangente de dicho ángulo.

Actividad 11: En un triángulo rectángulo, el cateto opuesto a un ángulo que mide π/8 radianes tiene una longitud de 80 centímetros. Encontrar las longitudes del otro cateto y de la hipotenusa.

Actividad 12: Durante el verano y al mediodía podemos suponer que los rayos solares inciden perpendicularmente sobre la tierra. Si en ese momento, un poste inclinado 20° respecto a la vertical, proyecta una sombra sobre el suelo de 3 m, ¿qué longitud tiene el mismo?

Actividad 13: Una señora con una estatura de 1,60 metros proyecta una sombra deldoble de su estatura. ¿Qué ángulo forma el sol con el suelo?

Actividad 14: Una escalera de 12 m de largo está apoyada contra una pared. Si el ángulo que forma con el suelo mide 68°, ¿a qué altura se encuentra el extremo superior de la escalera?

Actividad 15: Un triángulo equilátero tiene un perímetro de 18 centímetros. Encontrar la longitud de una de las alturas.

PROBLEMAS

1.- La rueda de una bicicleta ha dado ha dado 6 vueltas y media. ¿Cuántos radianes ha girado un rayo de la rueda?

2.- En un triángulo rectángulo sus dos catetos son de igual longitud. Si la hipotenusa tiene una longitud de $12\sqrt{2}$, ¿cuál es la longitud de sus catetos?

3.- Calcular el área de un triángulo rectángulo ABC que tiene un ángulo agudo de 60° en el vértice B y uno de sus catetos AB mide 5 cm.

4.- Dado un ángulo de 60° en B, opuesto a la base de un triángulo rectángulo, y dicha base de una longitud de $12\sqrt{3}$, resolver el triángulo.

5.- Un avión que vuela a 6500 metros de altura, está a 40 km del punto de aterrizaje. En ese momento comienza a descender. ¿Cuál es el ángulo de descenso del avión?

6.- Para sostener un poste de 22 metros de altura se utiliza un cable de hacer sostenido al piso desde el extremo superior del poste. Calcular la longitud del cable sabiendo que el mismo forma con el piso un ángulo de 69°.

7.- Un rectángulo tiene un ancho de 16 cm y una diagonal de 20 cm de longitud. ¿Cuánto mide de largo el rectángulo?

8.- ¿Cuán larga es la sombra que proyecta un mástil de 11 m de altura cuando el sol tiene un ángulo de elevación de 30°?

9.- Un bote está a 6 metros debajo del nivel del muelle y a 12 metros del muelle medidos a lo largo de la superficie del agua. ¿Cuánta cuerda se necesita para alcanzar el bote?

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

SOLUCIONES

Actividad 1:

I) a) I b)II c)II d)IV e)III f)IV

II) $\alpha_1 = 0\,rad$, $\alpha_2 = \frac{1}{180}\pi$, $\alpha_3 = 60°$, $\alpha_4 = \frac{\pi}{4} rad$, $\alpha_5 = 57°17'44{,}81''$, $\alpha_6 = \frac{\pi}{3} rad$, $\alpha_7 = 90°$, $\alpha_8 = \frac{2}{3}\pi rad$, $\alpha_9 = \frac{3}{4}\pi rad$, $\alpha_{10} = 330°$, $\alpha_{11} = \frac{3}{2}\pi rad$, $\alpha_{12} = \frac{29}{18}\pi rad$

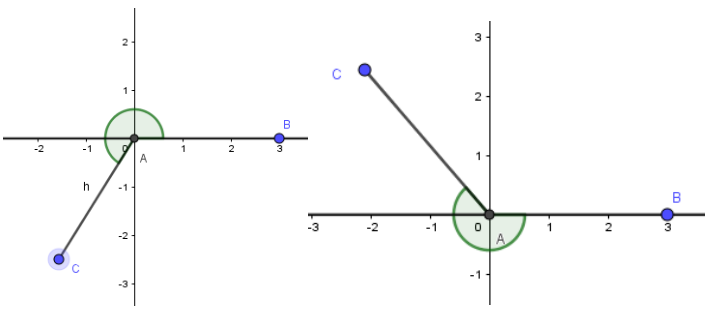
III) Ángulos cuadrantales: en sistema sexagesimal 0°,90°,180°,270°. En sistema circular: 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$,

Actividad 2:

I) a) II b)IV c)II d)III e)III f)III

II) a) $\alpha = 44°59'85''$ b) $\alpha = 229°58'55.7''$ c) $\alpha = 134°59'28.8''$ d) $\alpha = 330°$

Actividad 3:



Actividad 4: a) IV b) III

Actividad 5: a) $\theta = 30°$ b) $\theta = 135°$

Actividad 6 : $sen\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\tan\alpha = \frac{5}{12}$, $sen\,\beta = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $\tan\beta = \frac{12}{5}$

Actividad 7: $\alpha = 19°28'16.39''$ $\beta = 70°31'43{,}61''$

Actividad 8: $c_1 \cong 2{,}49cm, c_2 \cong 11{,}74cm$

Actividad 9: a) si, b) si, c) no, d) si.

Actividad 10: $sen\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{-3}{5}$, $\tan\alpha = \frac{-4}{3}$,

Actividad 11: $c_1 \cong 193{,}14\ cm, h \cong 209{,}05\ cm$

<u>Actividad 12</u>: El largo del poste es aproximadamente 8,77m.
<u>Actividad 13</u>: $\alpha = 26°33'54{,}18''$

<u>Actividad 14</u>: El extremo superior de la escalera está a 11,13m del suelo aproximadamente.

<u>Actividad 15</u>: Cualquiera de las tres alturas del triángulo mide $3\sqrt{3}$ cm.

<u>PROBLEMAS</u>

1.- Un rayo de la bicicleta ha girado aproximadamente 40,84 radianes

2.- Los catetos miden 12 u.

3.- El área es 43,30 cm^2.

4.- El área es $216\sqrt{3}u^2$

5.- El ángulo de descenso del avión es $\alpha = 80°38'52{,}67''$

6.- El largo del cable es aproximadamente 23,56m.

7.- El largo del rectángulo es 12cm.

8.- La sombra mide aproximadamente 19,05m.